EXERCICE 4.1. :

On note $\varphi(u,v,w) = u \wedge (v \wedge w)$ et $\psi(u,v,w) = \langle u,w \rangle v - \langle u,v \rangle w$. Les formes φ et ψ sont toutes deux multi-linéaires. Il suffit donc de vérifier l'égalité sur une base de l'espace. On peut donc par exemple choisir une base orthonormée directe de l'espace (e_1, e_2, e_3). On veut vérifier que $\varphi(e_i, e_j, e_k) = \psi(e_i, e_j, e_k)$ pour $i, j, k = 1, 2, 3$.

Si i, j, k sont deux à deux disjoints, les vecteurs e_i, e_j, e_k sont orthogonaux. On vérifie alors que

$$\psi(e_i, e_j, e_k) = \overrightarrow{0} = \varphi(e_i, e_j, e_k)$$

Sinon, si $j = k$, on a encore

$$\varphi(e_i, e_j, e_k) = \overrightarrow{0} = \psi(e_i, e_j, e_k).$$

Sinon, si $j \neq k$, quitte à multiplier le tout par -1, on peut supposer que $i = j$ et e_i, e_j, e_k directe. On obtient que

$$\varphi(e_j, e_j, e_k) = e_j \wedge e_i = -e_k$$

et

$$\varphi(e_j, e_j, e_k) = 0.e_j - 1.e_k = -e_k.$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif. Prenons comme exemple u, v, w non coplanaires. Alors

$$\begin{aligned}(u \wedge v) \wedge w &= -w \wedge (u \wedge v) \\ &= -\big(\langle w,v \rangle u - \langle w,u \rangle v\big)\end{aligned}$$

L'associativité et l'égalité déjà démontrée entraînerait que u, v, w sont coplanaires.

EXERCICE 4.2. :

1. On pose $\varphi(u,v,w) = (u \wedge v).w$ et $\psi = \text{dét}_{(e_1,e_2,e_3)}$. Les deux formes sont multilinéaires. Il suffit donc de vérifier l'égalité sur (e_1, e_2, e_3).

2. Le volume du parallélépipède :
On a $|(u \wedge v).w| = \| u \wedge v \| \| w \| \; |cos((u \wedge v), w)|$. Or $\| u \wedge v \|$ est l'aire du parralélogramme délimité par u, v, base du parrallélépipède et $\| w \| \; |cos((u \wedge v), w)|$ est la hauteur du parrallélépipède.

EXERCICE 4.3. :

1.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \\ =\;& (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \\ =\;& \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \\ =\;& (\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} \\ =\;& \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} \\ =\;& \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

2. On suppose que les faces ont même aire. On va montrer qu'étant donné deux faces, il existe une isométrie envoyant l'une sur l'autre. On va considérer par exemple ABC et ABD.

On pose u_A, u_B, u_C, u_D les produits vectoriels $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$. On considère alors f une application affine telle que

$$f: \quad \begin{aligned} A &\mapsto B \\ u_B &\mapsto u_A \\ u_C &\mapsto u_D \\ u_D &\mapsto u_C. \end{aligned}$$

Les faces ayant même aire, on a que

$$\| u_A \| = \| u_B \| = \| u_C \| = \| u_D \| .$$

En particulier, on en déduit que f est une isométrie. On note B', C', D' les images respectives de B, C, D par f.

Toute isométrie préserve les angles géométriques, les distances et de fait également le produit vectoriel au sens près. (Vérifier que l'on sait montrer cette dernière propriété.)

La préservation de l'orthogonalité donne

$$\begin{aligned}(AB) &= A + u_C^\perp \cap u_D^\perp \xrightarrow{f} B + u_D^\perp \cap u_C^\perp = (BA). \\ (AC) &= A + u_B^\perp \cap u_D^\perp \xrightarrow{f} B + u_A^\perp \cap u_C^\perp = (BD) \\ (AD) &= A + u_C^\perp \cap u_B^\perp \xrightarrow{f} B + u_D^\perp \cap u_A^\perp = (BC).\end{aligned}$$

On en déduit que $B' \in (AB), C' \in (BD), D' \in (BC)$. Comme $B'B = \| f(\overrightarrow{BA}) \| = BA$, quitte à composer par une symétrie centrale de centre B, on peut alors supposer que $B' = A$.

On va montrer que $C' = D$ et $D' = C$, ce qui montrera que f est une isométrie envoyant ABC sur ABD. On a en effet que $f(u_A) = \pm f(-(u_B + u_C + u_D)) = \pm(u_A + u_D + u_C) = \pm u_B$. On en déduit que

$$\begin{aligned}(BD) &= B + u_A^\perp \cap u_C^\perp \xrightarrow{f} A \pm u_B^\perp \cap u_D^\perp = (AC) \\ (BC) &= B + u_A^\perp \cap u_D^\perp \xrightarrow{f} A \pm u_B^\perp \cap u_C^\perp = (AD).\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}D &= (AD) \cap (BD) \xrightarrow{f} (BC) \cap (AC) = C \\ C &= (AC) \cap (BC) \xrightarrow{f} (BD) \cap (AD) = D.\end{aligned}$$

3. Non !

EXERCICE 4.4. :

1. On montre tout d'abord que les trois triangles BGC, CGA et AGB sont même aire.

Par définition de G, on a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Les aires des triangles $\mathcal{A}(BGC), \mathcal{A}(CGA), \mathcal{A}(AGB)$ étant proportionnelles aux coordonnées barycentriques respectives de A, B, C, on trouve bien l'égalité des aires.

2. A', B', C' étant les milieux des cotés, on a que $\mathcal{A}(BA'G)=\frac{1}{2}\mathcal{A}(BGC)=\mathcal{A}(A'GC)$. Par permutation cyclique et d'après le résultat précédent, on obtient bien l'égalité de tous les petits triangles.

Exercice 4.5. :

1. Coordonnées barycentriques de I :

On va montrer que

$$I=\bar{\{}(A,a),(B,b),(C,c)\}.$$

• Première possibilité :

On calcule les coordonnées barycentriques à partir sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont respectivement proportionnels au vecteurs $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}+\frac{\overrightarrow{BA}}{BA}$ et $\frac{\overrightarrow{CA}}{CA}+\frac{\overrightarrow{CB}}{CB}$. (long !)

• Deuxième possibilité :
On sait que les coordonnées barycentriques en A, B, C sont proportionnelles aux aires des triangles BIC, CIA, AIB. Or on constate que $\mathcal{A}(BIC)=IU.a$, $\mathcal{A}(CIA)=IV.b$ et $\mathcal{A}(BIA)=IW.c$. Comme $IU=IV=IW$, on obtient le résultat annoncé.

2. $\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CU}\ \rangle=\frac{a}{a+b+c}(ba+\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\ \rangle)$:

$$\begin{aligned}\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CU}\ \rangle &= \langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI}\ \rangle\\ &= \langle\ \overrightarrow{CB},\tfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA}+\tfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB}\ \rangle\\ &= \tfrac{a}{a+b+c}\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\ \rangle+\tfrac{b}{a+b+c}\parallel CB\parallel^2)\\ &= \tfrac{a}{a+b+c}(ba+\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\ \rangle)\end{aligned}$$

• Plus toutes les autres possibilité éventuelles non énumérées ici.

3. Calcul de $\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}}$:

On note que $\overline{CB}.\overline{CU}=\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CU}\ \rangle$. De même, $\overline{CB}.\overline{UB}=\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{UB}\ \rangle$. Ce dernier produit scalaire se calcule de la même manière que le précédent. On obtient alors

$$\begin{aligned}\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} &= \frac{\overline{CB}.\overline{UB}}{\overline{CB}.\overline{UC}}\\ &= -\frac{\langle\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\ \rangle+ca}{\langle\ \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\ \rangle+ba}.\end{aligned}$$

En utilisant des permutations cycliques, on obtient

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}}.\frac{\overline{VC}}{\overline{VA}}.\frac{\overline{WA}}{\overline{WB}}=-1.$$

Le théorème de Céva (c.f. exercice 1.45), on sait que les droites $(AU), (BV)$ et (CW) sont concourantes ou parallèles. On vérifiera qu'elle ne peuvent être parallèles.