EXERCICE 6.1. :

On note M la matrice donnée. Remarquons que l'on peut montrer que c'est une rotation en montrant que ${}^tMM = Id$ (M est la matrice d'une isométrie) et $\det(M) = 1$.
On note θ l'angle de la rotation. La seule chose que l'on peut en dire est que $1+2\cos(\theta) = Tr(M) = 0$, autrement dit $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Attention ! Le signe de l'angle n'est déterminé que par le choix d'un vecteur invariant (qui va fixer une orientation du plan).
Ici, l'espace propre de valeur propre 1 est $\langle\ (1,1,1)\ \rangle$. Soit $u = (1,1,1)$. Alors M est la matrice de $\rho_{u,\theta} = \rho_{-u,-\theta}$ où $\theta = \frac{2\pi}{3}$ car $\det(e_1, r(e_1), u) > 0$.

EXERCICE 6.3. :

Soient s_1, s_2, s_3 trois réflexions de plans respectifs $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ parallèles. $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est une isométrie de déterminant négatif. C'est donc une symétrie, une symétrie glissée ou une anti-rotation.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On note O_1, O_2, O_3 les projections orthogonales respectives de M sur $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ et M_1, M_2, M_3 tels que $M_1 = s_1(M), M_2 = s_2(M_1), M_3 = s_3(M_2)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_3} &= 2(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_2M_2} + \overrightarrow{M_2O_3}) \\ &= 2(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_2O_3}).\end{aligned}$$

Le vecteur $\eta = \overrightarrow{O_2O_3}$ est indépendant du point M choisi. (C'est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ tel que $t_\eta(\mathcal{P}_2) = \mathcal{P}_3$.) Autrement dit, M est fixe par $s = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ si et seulement si $M = O_1 + \eta$.
Si on note

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \eta,$$

on obtient donc un plan fixe par s. L'application s est donc une réflexion de plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \eta$.

EXERCICE 6.4. :

Soient ρ une rotation d'axe Δ et u le vecteur d'une translation t.

1. Montrons que si $u \in \overrightarrow{\Delta}$, alors ρ et t commutent :

Si $M \in \Delta$, l'égalité $\rho_\Delta \circ t_u(M) = t_u \circ \rho_\Delta(M)$ provient du fait que $M + u \in \Delta$.
Soit maintenant $M \in \mathcal{E}$. On note $M_u = M + u$, $M' = \rho_\Delta(M)$, $M'_u = M' + u$, H_0 et H_1 les projetés orthogonaux respectifs de M et M_u sur Δ.
On vérifie que l'on a que $\overrightarrow{H_1M_u} = \overrightarrow{H_0M}$ puis $\overrightarrow{H_1M'_u} = \overrightarrow{H_0M'}$. (Penser à utiliser les parallélogrammes.)
Il est alors facile de voir que $\rho_\Delta(M_u) = M'_u$, ce qui revient exactement à dire que

$$\rho_\Delta \circ t_u(M) = t_u \circ \rho_\Delta(M).$$

2. Montrons que si ρ et t commutent, alors $u \in \overrightarrow{\Delta}$:

Soit $M \in \Delta$. On a

$$\rho_\Delta\big(t_u(M)\big) = t_u \circ \rho_\Delta(M) = t_u(M).$$

$t_u(M)$ est donc un point fixe par ρ_Δ. Autrement dit, on trouve que $t_u(M) \in \Delta$ et donc $u = \overrightarrow{Mt_u(M)} \in \overrightarrow{\Delta}$.

EXERCICE 6.5. :

Soit r une rotation et t une translation. On a $\overrightarrow{r \circ t} = \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{t} = \overrightarrow{r}$. L'application vectorielle associée à $r \circ t$ est donc une rotation, ce qui signifie que $r \circ t$ est un vissage ou une rotation.

EXERCICE 6.6. :

1. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle s_P s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $-s_P$ s'écrit dans cette base $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'un retournement d'axe $\Delta = P^\perp$.

2. Soient r_1, r_2 deux demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2. Posons $P_1 = \Delta_1^\perp$ et $P_2 = \Delta_2^\perp$. On a alors

$$r_1 \circ r_2 = (-s_{P_1}) \circ (-s_{P_2}) = s_{P_1} \circ s_{P_2}.$$

C'est donc une rotation d'axe $P_1 \cap P_2$ et d'angle $2(P_1, P_2)$.

3. La composée de deux demi-tours est un demi-tour si et seulement si $2(P_1, P_2) = \pi$, autrement dit, si et seulement si P_1 et P_2 sont orthogonaux. Ceci se produit si et seulement si Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

4. $O^+(3)$ est engendré par les demi-tours :

Soit $\rho \in O^+(3)$. On sait qu'i existe s_{P_1}, s_{P_2} deux réflexions de plans P_1, P_2 tels que $\rho = s_{P_1} \circ s_{P_2} = (-s_{P_1}) \circ (-s_{P_2})$. Comme $-s_{P_1}, -s_{P_2}$ sont des demi-tours, on a montré que toute rotation s'écrivait comme produit de demi-tours.

5. Les demi-tours sont conjugués :

Soient r_1 et r_2 deux demi-tours d'axes respectifs Δ_1, Δ_2. On note $P_i = \Delta_i^\perp$ pour $i = 1, 2$. Il existe alors une isométrie φ telle que $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\varphi \circ r_1 \circ \varphi^{-1} &= -\varphi \circ s_{P_1} \circ \varphi^{-1} \\ &= -s_{\varphi(P_1)} \\ &= -s_{P_2} \\ &= r_2.\end{aligned}$$

Exercice 6.7. :

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ trois plans affines deux à deux orthogonaux. On considère s_1, s_2, s_3 les réflexions de plans respectifs $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. $s_1 \circ s_2$ est une rotation ρ_Δ d'axe $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Par orthogonalité des plans, on a que $\Delta \perp \mathcal{P}_3$. On a donc $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = \rho_\Delta \circ s_3$. C'est une antirotation (par définition).

Exercice 6.8. :

1. Le groupe des déplacements d'un polygone :

On note I_n^+ le groupe des déplacements d'un polygone régulier P_n à n cotés, puis

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & I_n^+ \\ & k & \mapsto & r^k, \end{array}$$

où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ (qui est bien un déplacement du polygone.) On vérifie que φ est un morphisme dont le noyau contient n. Aussi, le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi} : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & I_n^+ \\ & k & \mapsto & r^k \end{array}$$

est bien défini. On va montrer qu'il est bijectif.
Soit $k \in \ker(\tilde{\varphi})$. Alors $r^k = Id$. Or r^k est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. On obtient donc nécessairement que $k \in n\mathbb{Z}$. L'application $\tilde{\varphi}$ est donc injective.
Soit maintenant f un déplacement préservant le le polygone P_n. On note $A_0, \ldots, A_{n-1}$ les sommets successifs de P_n dans le sens direct. Comme f est une isométrie de déterminant positif dans le plan, c'est une rotation. Comme elle préserve le polygone (et donc les sommets du polygone), on obtient $f(A_0) = A_k$ pour un $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. L'angle de la rotation est donc de $\langle \overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_k} \rangle = k\frac{2\pi}{n}$. Autrement dit, on a $\tilde{\varphi}(k) = f$.

2. On note I_n l'ensemble des isométries préservant le polygone P_n. L'application

$$\begin{array}{rccc} \det : & I_n & \longrightarrow & \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & \det(f) \end{array}$$

est une application surjective de noyau $I_n^+ = Z/n\mathbb{Z}$. On en déduit donc que I_n est isomorphe au groupe diédral D_{2n}.

3. Cas du plan affine :

Il suffit de voir que l'on peut se ramener au cas vectoriel en observant que l'isobarycentre O des sommets est fixe par l'ensemble des isométries préservant P et que le vecteur η dirigeant le plan est préservé (au sens près).

4. Cas de la pyramide (même principe).

Exercice 6.9. :

On note $ABCD$ un tétraèdre régulier dans l'espace.

1. Deux arêtes opposées sont orthogonales :

On va montrer par exemple que $(AB) \perp (CD)$. C et D sont tous deux équidistants de A, B. On a donc que (CD) est dans le plan médiateur de $[AB]$, ce qui signifie que $(CD) \perp (AB)$.

2. La perpendiculaire commune passe par les milieux :

En reprenant les notations de 1), si on note Δ la perpendiculaire commune de (AB) et (CD), on trouve que Δ est dans le plan médiateur de (AB) et de (CD). C'est donc la droite intersection des deux plans médiateurs. Celui-ci passe par le milieu des segments $[AB]$ et $[CD]$.

3. Les diagonales d'un cube sont toutes de longueur égale. Elles forment donc des tétraèdres réguliers, au nombre de 2 correspondant à deux possibilités globales de choix des sommets.

4. Soient T un tétraèdre régulier. Il s'inscrit dans un cube C qui contient un autre tétraèdre noté T_2. Si f est une isométrie conservant le tétraèdre, on peut voir que f conserve également le cube qui le contient. L'ensemble des isométries (déplacements) $I(T)$ (groupe des isométries conservant T) est donc un sous-groupe de $I(Cube)$ $(I^+(Cube))$. Si A et B sont deux sommets consécutifs du cube, avec $A \in T$, on se donne f une rotation de $I(Cube)$ d'indice 2 échangeant A et B. Aussi on aura que $f(T) = T_2$ et $I(Cube)/I(T) = \{Id, f\}$, $I^+(Cube)/I^+(T) = \{Id, f\}$.

Exercice 6.10. :

La base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est envoyée sur une base d'éléments de même longueur par toute application affine préservant un tétraèdre régulier. Ces applications sont donc toutes des isométries.

Exercice 6.11. :

0. Pour les arêtes opposées orthogonales, c.f. ex 6.9.

1. $\overrightarrow{r}$ est une isométrie positive. C'est donc une rotation vecorielle. r est donc une rotation ou un vissage. De plus, il est évident que r admet A comme point fixe. C'est donc une rotation d'axe Δ passant par A.
Le théorème des milieux donne que B, C, D sont les milieux respectifs de $[C'D'], [D'B'], [B'C']$. On obtient donc $r(C') = C'$, autrement dit, on trouve que $\Delta = (C'A)$.

2. (BB_1) étant la perpendiculaire à (AC) issue de B et B étant équidistant de A, C, on obtient que (BB_1) est la médiatrice de $[AC]$. Par définition de B_1, on a également que (AC) est la médiatrice de $[BB_1]$. On a donc un quadrilatère $ABCB_1$ dont les diagonales se coupent en leur milieu. C'est un parallélogramme. On en déduit bien que $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BC}$.

$(AB_1) \perp (AD)$ car $(AB_1) // (BC) \perp (AD)$.

Comme $(AB_1) \perp (AD)$, on a par définition de s_{AD},

$\overrightarrow{AB_2} = -\overrightarrow{AB_1}$. L'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BC}$ nous permet d'en déduire que B_2ACD est un parallélogramme. Comme $AC = BC$, on sait de plus que c'est un losange et donc en particulier que $B_2B = B_2A = AC = AB$. On obtient bien que ABB_2 est un triangle équilatéral.

3. Le théorème des milieux donne $CD = BC'$. Or $AB = CD$ implique que $BC'D$ est isocèle en B.
On a également que $(AB)\perp(CD)//(C'B)$, d'où l'angle droit en B.

(HB) est la droite perpendiculaire à (AC') issue de B qui est équidistant de C' et A. C'est donc une médiatrice de $[AC']$ et passe donc en particulier par le milieu de $[AC']$. Autrement dit, H est le milieu de $[AC']$.

Par le théorème de Pythagore on a $HB^2 = AB^2 - \frac{AC'^2}{4}$. (AC') étant l'axe de la rotation r, on a que $r(H) = H$. Comme on a $r(B) = B_2$ (par définition de B_2), on a alors que $HB_2 = \| r(HB) \| = HB$. Autrement dit, on a $HB_2^2 = HB^2 = AB^2 - \frac{AC'^2}{4}$. On en déduit que dans le triangle AB_2B, on a $BB_2^2 = AB^2 = HB^2 + HB_2^2$. Autrement dit, ABB_2 est un triangle (isocèle) rectangle en H.

4. r est une rotation d'axe (AC') et d'angle non orienté $\frac{\pi}{2}$.