Exercice 2.1. :

Soit $[BC]$ un segment de longueur a. L'existence d'un triangle ABC de cotés a, b, c équivaut à l'existence d'une solution du système

$$\begin{cases} MB = c \\ MC = b \end{cases}$$

(qui correspond à l'étude des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}(B, c)$ avec le cercle $\mathcal{C}(C, b)$.

Il y a :

- 2 solutions si $|b - c| < a < b + c$,
- 1 solution si $|b - c| = a$ ou $a = b + c$,
- aucune solution dans les autres cas.

Vérification de la première assertion :
Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (BC). On peut par exemple considérer le repère orthonormé direct $(H, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|BC\|}$.
On note $B = (\beta, 0)$ et $C = (\gamma, 0)$ L'existence de $M = (0, y)$ est donc équivalente à l'existence d'une solution (y, β, γ) au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma &=& \beta + a \\ BM^2 &=& MH^2 + BH^2 \\ CM^2 &=& MH^2 + CH^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \gamma &=& \beta + a \\ c^2 &=& y^2 + \beta^2 \\ b^2 &=& y^2 + \gamma^2. \end{array} \right.$$

On résoud et on trouve qu'il existe une solution si et seulement si on a

$$2ac < |b^2 - c^2 - a^2|.$$

On vérifie que Les conditions de l'exercice rentrent dans ce cadre.

Exercice 2.2. :

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in E$. On note $\Delta = f(\lambda u + v) - \lambda f(u) + f(v)$.

$$\begin{array}{rcl} \| \Delta \|^2 &=& \| f(\lambda u + v) \|^2 + \lambda^2 \| f(u) \|^2 + \| f(v) \|^2 \\ && -2\lambda \langle f(\lambda u + v), f(u) \rangle - 2 \langle f(\lambda u + v), f(v) \rangle \\ && -2\lambda \langle f(u), f(v) \rangle \\ &=& \| \lambda u + v \|^2 + \lambda^2 \| u \|^2 + \| v \|^2 \\ && -2\lambda \langle \lambda u + v, u \rangle - 2 \langle \lambda u + v, v \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle \\ &=& 0. \end{array}$$

Exercice 2.3. :

Si s est une symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{H}$ dans une direction F. Soit M un point quelconque de l'espace. On note $M' = s(M)$ et $\mathcal{P}$ le plan médiateur de MM'. Comme la symétrie s est une isométrie, on a $OM = OM'$ pour tout $O \in \mathcal{H}$. Autrement dit, on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$. On en déduit $(MM') \perp \mathcal{H}$ et donc

$$F \perp \mathcal{H}.$$

Exercice 2.4. :

1. Expression de s :

Soit $x = \underbrace{x_H}_{\in H} + \underbrace{x_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in E = H \oplus H^\perp$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = x_H + \lambda x_0$. On en déduit que

$$s_H(x) = x_H - \lambda x_0 = x - 2\lambda x_0.$$

On trouve λ grâce à

$$\langle x, x_0 \rangle = \lambda \| x_0 \|^2 .$$

2. Existence et unicité de l'hyperplan de reflexion :

► Si $x = y$, n'importe quel plan passant par x vérifie $s_H(x) = y$.

► Si $x \neq y$, on pose $x_0 = x - y$ et $H = x_0^\perp$. On a

$$\begin{array}{rcl} \| x_0 \|^2 &=& \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &=& 2(\| x \| - \langle x, y \rangle) \\ &=& 2\langle x, x_0 \rangle. \end{array}$$

On en déduit ainsi

$$\begin{array}{rcl} s_H(x) &=& x - 2\frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 \\ &=& x - x_0 \\ &=& y. \end{array}$$

unicité :

Supposons qu'il existe un autre plan P tel que $s_P(x) = y$. On a alors

$$P = (P^\perp)^\perp = (y - x)^\perp = (H^\perp)^\perp = H.$$

3. Cas affine :

► Si $x = y$, n'importe quel plan passant par x vérifie $s_H(x) = y$.

► Si $x \neq y$, on prend $\mathcal{H}$ le plan médiateur de $[xy]$. Pour l'unicité,on se ramène au cas vectoriel en vectorialisant en un point $O \in \mathcal{H}$.

Exercice 2.5. :

On note O le milieu de $[AB]$.

$$\begin{array}{rcl} MA < MB & \Leftrightarrow & MA^2 < MB^2 \\ & \Leftrightarrow & MB^2 - MA^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{MO} + \underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}_{\overrightarrow{0}}) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OM} < 0 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} < 0 \end{array}$$

C'est donc bien un demi plan de frontière Δ. Il contient car $AA < AB$.

Exercice 2.6. :

⚠ On suppose que A, B, C ne sont pas alignés. On pose O le centre du cercle circonscrit à ABC, $\mathcal{P}$ le plan contenant A, B, C et $Delta = 0 + P^{\perp}$. On appelle le lieu des points tels que $MA = MB = MC$. On montre que $\mathcal{L} = \Delta$:

Soit M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

$$\begin{array}{rcl} MA = MB = MC & \Leftrightarrow & MA^2 = MB^2 = MC^2 \\ & \Leftrightarrow & MH^2 + HA^2 = MH^2 + HB^2 = \\ & & = MH^2 + HC^2 \\ & \Leftrightarrow & HA^2 = HB^2 = HC^2 \\ & \Leftrightarrow & HA = HB = HC. \end{array}$$

Il n'existe qu'un unique point vérifiant $HA = HB = HC$, c'est le centre O du cercle circonscrit. On a donc $H = O$. On en déduit que $M \in \mathcal{L}$ si et seulement si $m \in \Delta$.

Exercice 2.7. :

- Si $\Sigma\alpha_i = 0$:

Soit M' un point de l'espace. On a

$$\begin{array}{rcl} F(M') & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M'A_i^2 \\ & = & \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, M'M^2}_{=0} + \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2}_{F(M)} + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{MA_i} \\ & = & F(M) + 2\overrightarrow{M'M}.\big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\big). \end{array}$$

On pose $v(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. On vérifie que M est constant en vérifiant (simplement) que $v(A) = v(B)$ pour tous A, B dans l'espace.

- Si $\Sigma\alpha_i \neq 0$:

Soit M un point de l'espace. On a

$$\begin{array}{rcl} F(M) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}_{F(G)} + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + F(G) + 2\overrightarrow{MG}.\big(\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}}_{=\overrightarrow{0}}\big). \end{array}$$

- <u>Applications</u> :

1. $MA^2 + MB^2 = k$:

Soit I le milieu de $[AB]$. On a

$$\begin{array}{rcl} F(M) & = & F(I) + 2MI^2 \\ & = & IA^2 + IB^2 + 2MI^2 \\ & = & 2(\frac{AB}{2})^2 + 2MI^2 \\ & = & \frac{AB^2}{2} + 2MI^2. \end{array}$$

Ainsi le lieu des points M tels que $k = F(M)$ est

- $\mathcal{C}(I, k - \frac{AB^2}{2})$ si $k > \frac{AB^2}{2}$,
- I si $k = \frac{AB^2}{2}$,
- $\emptyset$ si $k < \frac{AB^2}{2}$.

2. $MA^2 - MB^2 = k$:

Soit O une solution particulière. On a

$$F(M) = F(O) + 2\overrightarrow{MO}.v = k + 2\overrightarrow{MO}.v$$

On en déduit que

$$F(M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.v = 0.$$

Notons que $v = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

On cherche une solution particulière O sur (AB). Soit O tel que $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AB}$

$$\begin{array}{rcl} O \text{ solution} & \Leftrightarrow & OA^2 - OB^2 = k \\ & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{BA}.(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = k \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{BA}.(2\lambda\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) = k \\ & \Leftrightarrow & (2\lambda - 1) \parallel \overrightarrow{AB} \parallel = k \\ & \Leftrightarrow & \lambda = \frac{1}{2}\big(\frac{k}{\|\overrightarrow{AB}\|} + 1\big) \end{array}$$

<u>Conclusion</u> : Le lieu des points cherché est la droite orthogonale à (AB) passant par le point O tel que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\big(\frac{k}{\|\overrightarrow{AB}\|} + 1\big)\overrightarrow{AB}$.

3. $MA^2 - k^2MB^2 = 0$:

<u>Si $k = 1$</u>, le lieu cherché est la médiatrice de $[AB$. (C'est un cas particulier pour $k = 0$ de la question précédente.

<u>Si $k \neq 1$</u>, on suppose $k > 0$.

On note $G = \bar{\{}(A, 1), (B, -k^2)$. Le lieu des points cherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{-\frac{F(G)}{1-k^2}} = kGB$.

Exercice 2.9. :

Les isométries du plan sont les réflexions et les rotations. Parmi elles, les positives sont les rotations. Si on ne garde que les involutives, il ne reste que les symétries centrales.

Exercice 2.10. :

On note H le pied de la hauteur issue de A. Soit $Q \in [AB]$. On note P et M respectivement les projetés sur (AC) et (BC) parallèlement à (BC) et (AH). Il existe alors $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$,

$$Q = \overline{\{}(A,\alpha),(B,\beta)\},$$

$$P = \overline{\{}(A,\alpha),(C,\beta)\},$$

$$M = \overline{\{}(H,\alpha),(B,\beta)\}.$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{MQ} & = & \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} \\ & = & \alpha\overrightarrow{MH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{MB} \\ & = & \alpha\overrightarrow{HA} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{MH} + \beta\overrightarrow{MB}}_{=\overrightarrow{0}} \\ & = & \alpha\overrightarrow{HA}. \end{array}$$

et

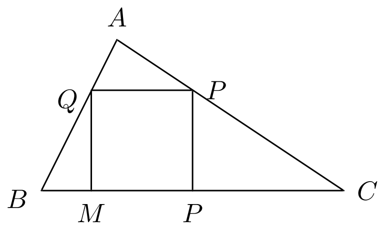
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{QP} & = & \alpha\overrightarrow{QA} + \beta\overrightarrow{QC} \\ & = & \underbrace{\alpha\overrightarrow{QA} + \beta\overrightarrow{QB}}_{=\overrightarrow{0}} + \beta\overrightarrow{BC} \\ & = & \beta\overrightarrow{BC}. \end{array}$$

Il existe $N \in (BC)$ si et seulement si $QM = QP$, autrement dit, s'il existe une solution au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha HA = \beta BC. \end{array} \right.$$

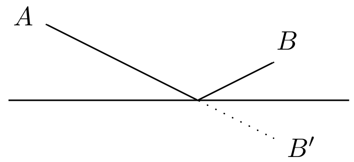
On trouve comme unique solution $\alpha = \frac{1}{AH+BC}$ et $\beta = 1 - \alpha$.

<u>Conclusion</u> :
Si on prend Q tel que $\overrightarrow{BQ} = \frac{BC}{AH+BC}\overrightarrow{BA}$, alors $MNPQ$ se déduit de Q par tracé de parallèles et de perpendiculaires.



Exercice 2.11. :

Soit B' le symétrique orthogonal de B par rapport à $\mathcal{D}$ et $M = (AB') \cap (\mathcal{D})$. On a $AM = MB' = MB$.



Exercice 2.13. :

⚠ On suppose que $R \neq R'$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centre respectif O et O', et de rayon respectif R et R'. On note $\mathcal{H} = \{$ homothéties de centre $I = \overline{\{}(O,R')(O',R)\}$ et de rapport $R'/R\} \cup \{$ homothéties de centre $I = \overline{\{}(O,-R')(O',R)\}$ et de rapport $-R'/R\}$ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des homothéties cherchées. On va montrer que $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ par double inclusion.

- $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$:

Soit $h \in \mathcal{L}$. Les homothéties conservant les médiatrices, on a $h(O) = O'$. De plus, si $M \in \mathcal{C}$, et si k est le rapport de h, on a

$$R' = \| \overrightarrow{O'h(M)} \| = \| \overrightarrow{h}(\overrightarrow{O'M}) \| = |k| \, \| \overrightarrow{O'M} \| = |k|R.$$

On en déduit les centres des homothéties et $h \in \mathcal{H}$.

- $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$:

Tout élément de h envoie O sur O' et tout point $M \in \mathcal{C}$ sur un point M' tel que $O'M' = R'$.

Remarque : : Si $R = R'$, les seules homothéties conservant les cercles sont les homothéties de rapport -1 et de centre le milieu de OO'. L'application affine associée à l'application linéaire $+1.Id$ étant une translation.
