

EXERCICE 3.1. :

Puisque l'orientation ne change pas si on multiplie les vecteurs par des scalaires positifs, quitte à diviser u et v par leur norme, on peut supposer que u et v sont de norme 1. On se donne une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v')$. Il existe alors une rotation r telle que $r(u) = v$. On sait qu'il existe alors $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que la matrice de r dans

$\mathcal{B}$ soit $r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$v = r(u) = r\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

On a alors

$$\det(u, v) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}\right) = \sin(\theta).$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} (u, v) \text{ directe} &\Leftrightarrow \det(u, v) > 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta) > 0 \\ &\Leftrightarrow \theta \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

EXERCICE 3.2. :

On va montrer que $\frac{a}{\sin(a)} = 2R$. Les autres égalités se démontrent par permutation circulaire des sommets A, B, C .

On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I le milieu de $[BC]$. Le théorème de l'angle inscrit nous donne

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \quad (2\pi) \\ &= 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}) \quad (2\pi) \end{aligned}$$

d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \quad (\pi).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} BC &= 2BI \\ &= 2|\sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})|OB \\ &= 2|\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|R \\ &= 2R \sin(A). \end{aligned}$$

EXERCICE 3.3. :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= c^2 + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= c^2 - a^2 + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= c^2 - a^2 + b^2 - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$. L'égalité $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = AB \cdot AC \cdot \cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = bc \cos(A)$ termine la démonstration.

EXERCICE 3.4. :

On note $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ les bissectrices intérieures et $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ les bissectrices extérieures respectivement des angles A, B, C .

On vérifiera que les bissectrices intérieures se coupent deux à deux, ainsi que les bissectrices extérieures. L'intersection de deux bissectrices intérieures est à l'intérieur du triangle ABC (on pourra considérer les cônes convexes issus des angles.)

L'intersection de Δ_A et Δ_B se trouve sur le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C . (Δ_A et Δ_B sont respectivement dans le complémentaire des cônes engendrés par les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$). Comme ces trois demi-plans

sont d'intersection totale vide, les bissectrices ne sont pas concourantes.

Point de concurrence des bissectrices intérieures :

On note $I = \delta_A \cap \delta_B$. On a alors

$$d(I, (BC)) = d(I, (AB)) = d(I, (AC)),$$

autrement dit, I est sur une bissectrice de l'angle $\hat{C}$. Comme I est à l'intérieur du triangle ABC , c'est forcément la bissectrice intérieure.

Point de concurrence des bissectrices extérieures :

On note $J = \Delta_B \cap \Delta_C$. On a alors

$$d(J, (AB)) = d(J, (BC)) = d(J, (AC)),$$

autrement dit, J est sur une bissectrice de l'angle $\hat{A}$. Comme les bissectrices extérieures ne se coupent pas, la bissectrice en question ne peut être Δ_A , c'est donc δ_A . D'après le commentaire du début d'exercice, J est de plus à l'extérieur du triangle ABC .

EXERCICE 3.5. :

On pose Δ la médiatrice de $[AB]$. La réflexion d'axe Δ envoie A sur B et laisse C invariant. Toute réflexion renversant les angles, on obtient

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}).$$

EXERCICE 3.6. :

On pose $t = \rho_{B, -\theta} \circ \rho_{A, \theta}$. L'application vectorielle associée à t est une rotation vectorielle d'angle $-\theta + \theta = 0$. C'est

donc l'identité. Autrement dit, t est une translation.
Comme $t(A) = \rho_{B,-\theta} \circ \rho_{A,\theta}(A) = \rho_{B,-\theta}(A)$, si on note $A' = \rho_{B,-\theta}(A)$, on a

$$t = t_{\overrightarrow{AA'}}.$$

EXERCICE 3.7. :

Remarque : pour tout nombre complexe z , on note $\Re(z)$ sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

1. Translations :

Soient u un vecteur d'image b dans $\mathbb{C}$, $M(z)$ et $M'(z')$.
On a

$$\begin{aligned} M' = t_u(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = u \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = u \\ &\Leftrightarrow z' - z = b \\ &\Leftrightarrow z' = z + b. \end{aligned}$$

2. Rotations :

Soit r une rotation de centre A et d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$.
Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} M' = r(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x - x_A) \cos(\theta) - (y - y_A) \sin(\theta) \\ (x - x_A) \sin(\theta) + (y - y_A) \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remplace les parties réelles et imaginaires par $\Re(w) = \frac{w+\bar{w}}{2}$ et $\Im(w) = \frac{w-\bar{w}}{2i}$ dans le résultat précédent pour tout complexe w et on trouve en fait

$$z' - z_A = a(z - z_A),$$

où $a = e^{i\theta}$. En posant $b = az_A + z_A$, on obtient bien la forme voulue $z' = az + b$.

De même, pour toute forme $z' = az + b$, comme $a \neq 1$, on peut trouver $z_A = \frac{b}{a-1}$ tel que $z' - z_A = a(z - z_A)$.

3. Réflexions :

Supposons qu'on ait une réflexion s par rapport à une droite $\Delta = (AB)$. Il existe une rotation r de centre O (centre du repère affine) telle que $r(\Delta)$ soit une droite Δ' parallèle à l'axe des abscisses. On pose alors $f = r \circ s$. C'est une réflexion d'axe Δ' . On note $\Im(z) = c$ l'équation de Δ' dans le plan complexe.

On se donne maintenant $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan et on note H la projection de M sur Δ' . On a

$$\begin{aligned} M' = f(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{M'H} = \overrightarrow{HM} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Re(h) - \Re(z') \\ \Im(h) - \Im(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(z) - \Re(h) \\ \Im(z) - \Im(h) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or on a $\Re(h) = \Re(z)$ et $\Im(h) = c$. On en déduit que

$$\begin{aligned} M' = f(M) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Re(z') - \Re(z) \\ c - \Im(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Im(z) - c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z') = \Re(z) \\ \Im(z') - c = -(\Im(z) - c). \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $M' = f(M)$ si et seulement si

$$z' = \bar{z} + 2c.$$

Pour terminer la correspondance, il faut encore retrouver s . Si $r = Id$, il n'y a rien à faire. Sinon, d'après le cas des rotations, il existe $\theta \in]0, 2\pi]$ et $b_0 \in \mathbb{C}$ tel que $r^{-1}(z) = e^{i\theta}z + b_0$. On obtient le résultat cherché par composition.

4. symétries glissées :

Soit s une symétrie glissée. Il existe alors un axe Δ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul d'affixe u tels que $s = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\Delta}$. Pour $M(z)$ dans le plan, on pose $M'' = s_{\Delta}(M)$ et z'' l'affixe de M'' . Soit finalement $M'(z')$ un point quelconque. Les expressions des translations et symétries étant connues, on sait qu'il existe a et b_0 tels que $|a| = 1$, $a \neq 1$, $a\bar{b}_0 + b_0 = 0$ et $z'' = a\bar{z} + b_0$.

$$\begin{aligned} M' = s(M) &\Leftrightarrow M' = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\Delta}(M) \\ &\Leftrightarrow M' = t_{\overrightarrow{u}}(M'') \\ &\Leftrightarrow z' = z'' + u \\ &\Leftrightarrow z' = a\bar{z} + \underbrace{b_0 + u}_b. \end{aligned}$$

On vérifie que $a\bar{b} + b = a\bar{u} + u \neq 0$. On vérifiera également que l'on sait faire la réciproque.

EXERCICE 3.8. :

Une transformation affine f s'écrit

$$f(z) = az + b\bar{z} + c$$

dans le plan complexe.

- Voyons déjà que toute application affine s'écrit ainsi.

Pour le prouver, on pose $\Omega(w)$, $M(z)$ et $M'(z')$ trois points du plan. On a alors $f(M) = f(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M})$. Comme $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$. Si on note $z = x + iy$, $w = x_w + iy_w$ et $z' = x' + iy'$, on trouve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(x, y) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(x - x_w) + \beta(y - y_w) \\ \gamma(x - x_w) + \lambda(y - y_w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on trouve

$$f(x, y) = A(z - w) + \overline{B(z - w)},$$

où $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta \\ \gamma - i\lambda \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\lambda \end{pmatrix}$. Dans le plan complexe, il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = az + b\bar{z} + c,$$

où $A(a), B(b)$.

- Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application dont l'expression par affixe est $z' = az + b\bar{z} + c$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ fixés. On va montrer qu'elle est affine, c'est-à-dire que l'application

$$L_O : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & f(O + \overrightarrow{u}) - f(O) \end{matrix}$$

est linéaire pour un élément $O \in \mathcal{E}$ fixé. Or on pourra constater que si $\vec{u}$ est d'affixe u , alors $L_O(u) = au + b\bar{u}$ qui est bien linéaire.
(Remarquer qu'on s'autorise ici un abus de notation.)

EXERCICE 3.9. :

1. Soit $f_{\varphi,\psi} = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$. Le groupe $O^+(2)$ étant commutatif, on trouve $\vec{f} = Id$. f est donc une translation.

2. Soit $\mathcal{B}$ une partie bornée du plan et $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ l'ensemble des déplacements qui conservent $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ est non commutatif, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$ tels que $f_{\varphi,\psi} \neq Id$. D'après la question précédente, c'est donc une translation de vecteur u non nul. Soit $M \in \mathcal{B}$. On pose $M_n = t_u^n(M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. M_n est donc une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ dont la norme tend vers l'infini. C'est contradictoire.

3. Supposons que G soit un sous-groupe fini du groupe des déplacements affines. Supposons que G ne soit pas commutatif. De la même manière que précédemment, on peut construire une suite infinie de translations $\{t_{nu}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans G , ce qui contredit le fait que G est fini.

EXERCICE 3.10. :

On pose $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, M un point du plan et

$$\Omega = \{\bar{g}_1(M), \dots, g_n(M)\}.$$

Ω est un point fixe pour tout $g \in G$:

Soit $g \in G$. g conservant les barycentres et l'application $g_i \mapsto g \circ g_i$ étant un automorphisme de G , on a bien $g(\Omega) = \Omega$.

EXERCICE 3.11. :

On suppose dans un premier temps que $k = 1$. Les ensembles demandés sont les demi-plan séparés par la médiatrice de $[AB]$.

Si $k \neq 1$, on étudie l'ensemble des points solutions. On reprend les notations de l'exercice 2.7. et on pose $\mathcal{C}$ le cercle solution de $MA = kMB$. Le signe de $MA - kMB$ est alors le même que celui de $f(O) + (1 - k^2)MO^2$, où $O = \{(A, 1), (B, -k^2)\}$. Or on a

$$f(0) + (1 - k^2)MO^2 = (1 - k^2)MO^2 - \frac{k^2 AB^2}{1 - k^2}$$

En conclusion, le lieu des point M tels que $MA < kMB$ est $\begin{cases} \text{l'intérieur du cercle } \mathcal{C} & \text{si } 0 < k < 1 \\ \text{l'extérieur du cercle } \mathcal{C} & \text{si } k > 1. \end{cases}$

De même, le lieu des point M tels que $MA > kMB$ est $\begin{cases} \text{l'extérieur du cercle } \mathcal{C} & \text{si } 0 < k < 1 \\ \text{l'intérieur du cercle } \mathcal{C} & \text{si } k > 1. \end{cases}$

REMARQUE : L'ensemble des points M solutions de l'équation $MA = kMB$ sont les points situés sur le cercle de diamètre $[IJ]$, où $I = \{(A, 1)(B, -k)\}$ et $J = \{(A, 1)(B, k)\}$:

$$\begin{aligned} MA = kMB &\Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{MI}.(1 + k)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3.12. :

On note respectivement O, O' et R, R' les centre et rayon des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

• ANALYSE :

Supposons que s soit une similitude envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. On note k son rapport. La similitude étant bijective, le fait que M' balaie $\mathcal{C}'$ entraîne immédiatement, par unicité du centre d'un cercle que $O'' = O'$ et $k = \frac{R'}{R}$.

Supposons que s ne soit pas une translation. Alors s admet un centre noté Ω . Soit $M \in \mathcal{C}$. On note $O'' = s(0)$ et $M' = s(M)$. On a

$$R' = O''M' = s(O)s(M) = kOM = kR.$$

Son centre Ω vérifie $\Omega O' = k\Omega 0$. Il est donc

- ou bien sur le cercle de diamètre $[IJ]$, où $I = \{(O', 1)(O, -k)\}$ et $J = \{(O', 1)(O, k)\}$ si $R' \neq R$ (c.f. exercice 2.7),
- ou bien sur la médiatrice de $[OO']$ si $R' = R$ et $O \neq O'$ (c.f. exercice 2.7),
- ou bien sur O si $O = O'$. (Dans ce cas, c'est une homothétie de centre O .)

s ne peut être une translation seulement si on a $R' = R$.

• Réciproque :

Supposons que $O \neq O'$.

Si s est une similitude de rapport k tel que $k = \frac{R'}{R}$ de centre Ω sur le cercle de diamètre $[IJ]$ si $k \neq 1$ ou sur la médiatrice de $[OO']$ si $k = 1$, et d'angle $\theta = (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'})$, la condition sur Ω étant équivalente à $\Omega O' = k\Omega$, on vérifie directement que $s(O) = O'$ et par suite, que $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Supposons que $O = O'$.

Il est clair que l'homothétie de rapport $k = \frac{R'}{R}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

EXERCICE 3.13. :

On pose $u = \overrightarrow{FF'}$ et $\theta = (\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ (π). Alors $r_{F',\theta} \circ t_u$ envoie $\mathcal{D}$ sur une droite $\mathcal{D}''$ parallèle à $\mathcal{D}'$ et F sur F' . Soit Δ une droite passant par F' non parallèle à $\mathcal{D}'$ et donc non parallèle à $\mathcal{D}''$. On pose respectivement I le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$ et J le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}''$. Notons que $J \neq F$, sinon $F' \in \mathcal{D}$ (vérifier pourquoi). $h_{F, \frac{\overrightarrow{FI}}{\overrightarrow{FJ}}}$ envoie $\mathcal{D}''$ sur $\mathcal{D}'$ et fixe F' .

Conclusion $h_{F, \frac{\overrightarrow{FI}}{\overrightarrow{FJ}}} \circ r_{F',\theta} \circ t_u$ convient.

EXERCICE 3.14. :

Comme J est du même coté de $[BC]$ que A , on a

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) &= (\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JI}) \quad (2\pi) \\ &= (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}) \quad (2\pi) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \quad (2\pi) . \end{aligned}$$

On en déduit que (AI) est la bissectrice intérieure de l'angle en A .

$[IJ]$ étant un diamètre du cercle, le triangle IAJ est rectangle en A . Autrement dit, $(AJ) \perp (AI)$ entraîne que (AJ) est la bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC .

EXERCICE 3.15. :

On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre de ABC .

1. Les points D, E, F sont sur $\mathcal{C}$:

D'après les résultats obtenus dans l'exercice 2.17, on sait que l'orthocentre est sur les cercles $\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{BC}, \mathcal{C}_{CA}$ symétriques de $\mathcal{C}$ respectivement par-rapport à $(AB), (BC)$ et (CA) . On en déduit que $D = s_{(AB)}(H) \in s_{(AB)}(\mathcal{C}_{AB}) = \mathcal{C}$. De même, on obtient également $E, F \in \mathcal{C}$.

2. On va montrer que $(AH) = (AD)$ est la bissectrice intérieure de DEF :

Le point C étant sur $\mathcal{C}$ du même coté de (AF) que D , on a

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}) \quad (2\pi).$$

De plus, (CF) et (AB) sont orthogonaux. Autrement dit,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}) &= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}) \quad (2\pi) \\ &= \frac{\pi}{2} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi) . \end{aligned} \quad \text{De même, on}$$

$$\text{obtient } (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi).$$

Les autres bissectrices intérieures se démontrent de la même manière, par permutation cyclique des points.

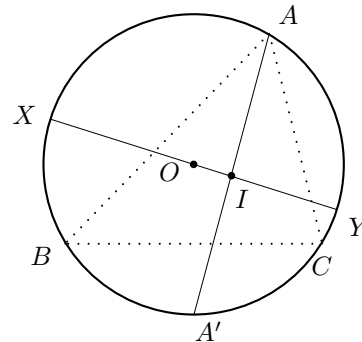
3. Construction :

On se donne un triangle DEF . On construit ses bissectrices intérieures et son cercle circonscrit. Les sommets A, B, C sont les points d'intersection du cercle et des bissectrices.

EXERCICE 3.16. :

1. On montre que les triangles AIX et $YA'I$ sont semblables :

On va montrer que deux des angles sont égaux.



$$\text{On a } (\overrightarrow{IY}, \overrightarrow{IA'}) = (\overrightarrow{IX}, \overrightarrow{IA}).$$

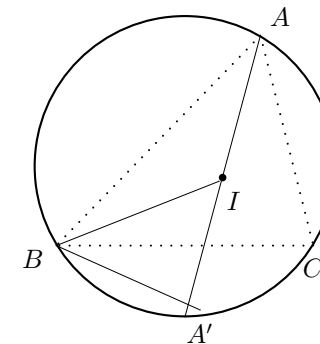
De plus, on a également

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{XA}) &= (\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XA}) \quad (\pi) \\ &= (\overrightarrow{A'Y}, \overrightarrow{A'A}) \quad (\pi) \end{aligned}$$

car A, Y, A', X sont sur $\mathcal{C}$. On en déduit que $(\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{XA}) = (\overrightarrow{A'I}, \overrightarrow{A'Y})$. Autrement dit, deux des angles géométriques des triangles AIX et $YA'I$ sont égaux. Ils sont donc semblables.

2. Le triangle BIA' est isocèle en A' :

On va montrer que les angles $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI})$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA'})$ sont égaux.



On a

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI}) &= (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \\ &= (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA'}) &= \pi - (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \\ &= \pi - (\pi - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) - (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA'})) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA'}).$$

3. Formule d'Euler :

Comme les triangles IXA et IYA' sont semblables, on a

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IX} \cdot \overline{IY}.$$

Un calcul de $\overline{IX} \cdot \overline{IY}$ par introduction de O donne

$$\overline{IX} \cdot \overline{IY} = OI^2 - R^2.$$

On montre également que $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = 2Rr$. En effet, on a $r = \sin(a/2) \cdot IA$.

De plus, on a $IA' = BA'$. Si on pose A'' le point du cercle distinct de A' sur la droite (OA') , on obtient un triangle $A''BA'$ rectangle en B dont l'angle en A'' est $a/2$ (théorème de cocyclicité). On en déduit que $BA' = \sin(a/2) \cdot 2R$, d'où le résultat.

4. Inégalité d'Euler :

Elle se déduit de la formule d'Euler et du fait que $OI^2 \geq 0$.

REMARQUE : Au lieu de montrer que les triangles AXI et $YA'I$ sont semblables, on aurait pu utiliser ici directement la puissance d'un point par-rapport à un cercle.

Rappel (puissance d'un point par-rapport à un cercle) :

Soit $\mathcal{C}(O, R)$ un cercle de centre O et de rayon R . Soit I

un point de l'espace. Pour tous points $M, N \in \mathcal{C}$ tels que I, M, N sont alignés, on a

$$\overline{IM} \cdot \overline{IN} = OI^2 - R^2.$$

(Autrement dit, $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IM'} \cdot \overline{IN'}$ pour tous points $M, N, M', N' \in \mathcal{C}$ tels que I, M, N alignés et I, M', N' alignés.

EXERCICE 3.17. :

1. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q, R) & \mapsto & PQ + QR + RP. \end{array}$ Elle est continue. Elle admet donc un minimum sur le compact $[BC] \times [AB] \times [AC]$.

2. À $P \in [BC]$ fixé, on montre qu'il existe $Q \in [AC]$ et $R \in [AB]$ tels que PQR soit de périmètre minimal :

On note R_1 et Q_1 les images de P respectivement par les symétries orthogonales par-rapport à AB et AC (de manière à ce que la droite (AB) soit la médiatrice de PR_1 et (AC) soit la médiatrice de PQ_1). Soient alors Q, R les points situés à l'intersection de la droite (R_1Q_1) et des droites $(AB), (AC)$. Les trois angles étant aigus, on a $Q \in [AB]$ et $R \in [AC]$. La distance $PQ + QR + RP = R_1Q + QR + RQ_1$ est donc minimale et les points Q, R ainsi construits répondent à la question.

3. Problème général :

Analyse : Supposons que P, Q, R répondent au problème. A étant sur la médiatrice de $[PR_1]$ et sur la médiatrice de $[PQ_1]$, on a

$$AR_1 = AP = AQ_1.$$

Le triangle AR_1Q_1 est donc isocèle en A de base R_1Q_1 . De plus, on a $(\overrightarrow{AR_1}, \overrightarrow{AQ_1}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Comme $PQ + QR + RP$ est minimal, on a R_1Q_1 minimal. Comme le triangle AQ_1R_1 est isocèle avec un angle en A constant par-rapport à P , la base est de longueur minimale si et seulement si le coté $AR_1 = AQ_1$ est minimal. Or $AR_1 = AQ_1 = AP$. Ainsi AP est minimal, ce qui est

réalisé seulement si P est le pied de la hauteur du triangle ABC .

 Penser à faire la synthèse !

4. Les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures du triangle PQR : c'est l'exercice 3.15.

EXERCICE 3.18. :

Soit Δ la droite passant par C et parallèle à (AP) . On note C' sont point d'intersection avec (AB) . (Ce point existe, le vérifier). Par le théorème de Thalès, on a l'égalité

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Le calculs suivants de feront modulo π . On a

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CA}) &= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) - (\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'C}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \\ &= (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}). \end{aligned}$$

La combinaison du résultat $(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'C}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$ et du résultat précédent permet de dire que (AP) est la bissectrice de l'angle si et seulement si le triangle $AC'C$ est isocèle en A . Or, $AC'C$ est isocèle en A si et seulement si $AC = AC'$. Grâce au résultat préliminaire sur les rapports des dimensions, on en déduit que (AP) est une bissectrice si et seulement si $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

EXERCICE 3.19. :

Soit C' le point d'intersection de la parallèle à (AP) passant par C . Le théorème de Thalès nous donne immédiatement que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AC'}{AC}.$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} &\Leftrightarrow AC = CC' \\ &\Leftrightarrow ACC' \text{ est isocèle en } C' \\ &\Leftrightarrow (C'C, C'A) + 2(AB, AC) = 0 \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow 2(AB, AC) = (AP, AB) \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow (AP) \text{ est la bissectrice de } BAC. \end{aligned}$$

EXERCICE 3.20. :

Dans tous les cas, on pose $u = \overrightarrow{AA'}$ et $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ et $\varphi = r_{A', \theta} \circ t_u$. On obtient par construction que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$. On pose $\psi = \begin{cases} id & \text{si } \varphi(C) = C' \\ s_{(AB)} & \text{sinon,} \end{cases}$ où $s_{(AB)}$ est une réflexion orthogonale d'axe $(A'B')$. Quitte à composer par φ , on peut donc supposer que $A = A'$ et $B = B'$. On va alors montrer dans tous les cas qu'on a bien $\psi(C) = C'$. Le cas $C = C'$ étant trivial, on se placera systématiquement dans l'hypothèse contraire et on note $C'' = \psi(C')$.

1. Grâce aux égalités $AC = A'C'$ et $|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})|$, on obtient $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (sinon, $C = C'$). Par réflexion, on obtient alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC''}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Les points A, C, C'' sont donc alignés sur une même demi droite d'origine A . Par isométrie, on a $AC'' = AC'$, ce qui achève de montrer que $C'' = C$ grâce à l'hypothèse $AC = AC'$.

2. Supposons que le triangle ABC soit direct. On a deux possibilités : $A'B'C'$ direct ou $A'B'C'$ indirect.

Dans le premier cas, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA})$. Autrement dit, on obtient $C' \in (AC) \cap (CB) = \{C\}$.

Dans le deuxième cas, on a $-(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC''}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})$ et $-(\overrightarrow{BC''}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) = -(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA})$. Autrement dit, on obtient $C' \in (AC'') \cap (C''B) = \{C''\}$.

3. On peut par exemple se ramener à un des deux cas précédents grâce à l'exercice 3.2.

EXERCICE 3.21. :

1. φ est une isométrie positive du plan. C'est donc une rotation d'angle $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Autrement dit, c'est une symétrie centrale.

2. $\varphi(J) = J$:

On note $J_A, J_B = j, J_C$ les projections du centre du cercle circonscrit respectivement sur les cotés $(BC), (AC), (AB)$. Vérifier qu'on a $BJ_C = BJ_A$, $AJ_B = AJ_C$, $CJ_A = CJ_B$. On en déduit alors que $\varphi : J = J_B \mapsto J_A \mapsto J_C \mapsto J_B = J$.

En conclusion, φ est une symétrie centrale de centre J .

EXERCICE 3.22. :

1. $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABP) + \mathcal{A}(ACP) = \frac{1}{2}(br_b + cr_c)$.

De plus, on a $\mathcal{A}(ABC) = a.AH$ où H est le pied de la hauteur issue de A . Par projection, on sait que $AP \leq AH$, d'où le résultat.

2. Soit P à l'intérieur du triangle ABC et $P' = (AP) \cap (BC)$. On sait alors que $P' \in [BC]$. On peut lui appliquer l'inégalité de la première question. On obtient

$$aR'_a \geq \frac{1}{2}(br'_b + cr'_c).$$

On note k le rapport de l'homothétie h qui envoie P' sur P . On vérifiera qu'on a bien $r_b = k.r'_b$, $r_c = k.r'_c$ et $R_a = k.R'_a$, autrement dit, on a

$$ak.R_a \geq \frac{1}{2}(bk.r_b + ck.r_c)$$

ce qui donne bien le résultat cherché

$$a.R_a \geq \frac{1}{2}(b.r_b + c.r_c).$$

3. On note P' le symétrique de P , ainsi que A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle en A .

Notons que P' est à l'intérieur du triangle $A'B'C'$ et qu'on peut donc lui appliquer le résultat

$$a.R'_a \geq \frac{1}{2}(b.r'_b + c.r'_c).$$

Or, par symétrie, on a $AP = A'P' = AP'$, autrement dit $R'_a = R_a$. Par préservation des projections, on a également $r'_b = r_c$ et $r'_c = r_b$. D'où le résultat cherché.

4. On considère les trois inégalités $a.R_a \geq \frac{1}{2}(b.r_b + c.r_c)$, $b.R_b \geq \frac{1}{2}(a.r_a + c.r_c)$ et $c.R_c \geq \frac{1}{2}(a.r_a + b.r_b)$ que l'on multiplie respectivement par bc, ac et ab . On additionne puis la division par abc donne le premier résultat cherché.

Le deuxième résultat repose sur l'inégalité (à connaître!)

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

(Se démontre grâce à $0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$).

5. • Supposons que ABC soit un triangle équilatéral et que P soit son centre. Comme on a $R_a = R_b = R_c$ et $r_a = r_b = r_c$, l'inégalité devient en fait $R \geq 2r$. Or comme P est le centre de gravité du triangle, si on note $H_A = (AG) \cap (BC)$, on sait que $PA = 2PH_A$. Or, ici, on a $H_A = r$, ce qui montre bien que l'inégalité est une égalité.

• Supposons maintenant que l'inégalité soit une égalité. Ceci implique qu'on a en particulier les deux égalités suivantes :

$$(eg_1) : R_a + R_b + R_c = \frac{b^2 + c^2}{bc}r_a + \frac{c^2 + a^2}{ca}r_b + \frac{a^2 + b^2}{ab}r_c$$

et

$$(eg_2) : \frac{b^2 + c^2}{bc}r_a + \frac{c^2 + a^2}{ca}r_b + \frac{a^2 + b^2}{ab}r_c = 2(r_a + r_b + r_c).$$

On considère (eg_1) . Elle équivaut à

$$(b - c)^2r_a + (c - a)^2r_b + (b - a)^2r_c = 0$$

autrement dit, $a = b = c$ (car $r_a, r_b, r_c > 0$). Le triangle est donc équilatéral. Montrons maintenant que P est le centre du triangle.

On considère (eg_1) qui devient

$$R_a + R_b + R_c = 2(r_a + r_b + r_c)$$

et qui équivaut à

$$R_a + R_b + R_c = (r_b + r_c) + (r_a + r_c) + (r_a + r_b).$$

Comme on a $R_a \geq r_b + r_c$ (ainsi que toutes les égalités correspondant aux permutations de a, b, c), on a

$$\begin{aligned} R_a &= r_b + r_c \\ R_b &= r_a + r_c \\ R_c &= r_a + r_b. \end{aligned}$$

Une résolution d'équations donne $R_a = R_b = R_c$, autrement dit, P est le centre du triangle.

EXERCICE 3.23. :

1. Soit Δ la médiatrice de $[AB]$, de sorte qu'on ait $O \in \Delta$. Δ est également la médiatrice de $[BD]$. En effet, Si Δ' est la médiatrice de $[BC]$, on a $\Delta' \perp (BD) // (AC) \perp \Delta$ et $O \in \Delta'$. Or deux droites parallèles ayant un point en commun sont identiques.

Conclusion : la symétrie orthogonale d'axe Δ envoie le couple (A, B) sur le couple (C, D) et fixe O . On en tire l'égalité d'angles

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}).$$

2. On pose Δ_i la perpendiculaire à D_i passant par O et r_i la symétrie orthogonale par-rapport à Δ_i . Par construction, on a

$$\begin{aligned} M_1 &= r_1(M_0) \\ M_2 &= r_2(M_1) \\ M_3 &= r_3(M_2) \\ M_4 &= r_1(M_3) \\ M_5 &= r_2(M_4) \\ M_6 &= r_3(M_5). \end{aligned}$$

On pose $\varphi = (r_3 \circ r_2 \circ r_1)^2$. Par composition, φ est une isométrie positive avec un point fixe O . C'est donc une rotation de centre O et d'angle $2((\Delta_1, \Delta_2) + (\Delta_2, \Delta_3) + (\Delta_3, \Delta_1)) = 2(\Delta_1, \Delta_1) = 0 \pmod{2\pi}$. C'est donc l'identité. On en déduit que $M_6 = \varphi(M_0) = M_0$.

EXERCICE 3.24. :

On utilise la version du théorème de l'angle inscrit avec la tangente. On a

$$\begin{aligned}(TB, TM) &= (CB, CT) \\ &= (NB, NM).\end{aligned}$$

Grâce au théorème de cocyclicité classique, on obtient bien M, N, C, T cocycliques.

EXERCICE 3.25. :

1. $(BE, EF) = (AB, AC)$:
 E et F sont sur le cercle de diamètre $[AB]$. Par cocyclicité, on a

$$\begin{aligned}(EB, EF) &= (AB, AF) \\ &= (AB, AC).\end{aligned}$$

Or $(EB, EF) = (BE, EF)$, d'où le résultat.

2. On a $(DB, EF) = (EB, EF) = (AB, AC)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}ABCD \text{ cocycliques} &\Leftrightarrow (AB, AC) = (DB, DC) \\ &\Leftrightarrow (DB, EF) = (DB, DC) \\ &\Leftrightarrow (EF) // (DC).\end{aligned}$$

EXERCICE 3.26. :

On utilise la cocyclicité et la relation de Chasles dur

les angles pour établir l'ensemble des égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned}(AB, AD) &= (AB, AA') + (AA', AD) \\ &= (B'B, B'A') + (D'A', D'D) \\ &= (B'B, B'C') + (B'C', B'A') + \\ &\quad (D'A', D'C') + (D'C', D'D) \\ &= (CB, CC') + (B'C', B'A') + \\ &\quad (D'A', D'C') + (CC', CD) \\ &= (CB, CD) + (B'C', B'A') + (D'A', D'C')\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}ABCD \text{ cocycliques} &\Leftrightarrow (AB, AD) = (CB, CD) \\ &\Leftrightarrow (B'C', B'A') + (D'A', D'C') = 0 \\ &\Leftrightarrow B'C'A'D' \text{ cocycliques.}\end{aligned}$$

EXERCICE 3.27. :

$$\begin{aligned}(QP, QR) &= (QP, QM) + (QM, QR) \\ &= (CP, CM) + (AM, AR) \quad (\text{cocyclicité}) \\ &= (BC, CM) + (AM, BA)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}Q, P, R \text{ alignés} &\Leftrightarrow (QP, QR) = 0 \\ &\Leftrightarrow (BC, CM) = -(AM, BA) \\ &\Leftrightarrow (CB, CM) = (AB, AM) \\ &\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ cocycliques.}\end{aligned}$$

EXERCICE 3.28. :

1. Soit h l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose P, Q, R les images respectives de P, Q, R par h . Ainsi, P', Q', R' sont alignés si et seulement si P, Q, R le sont. Comme P, Q, R sont en fait les projetés de M sur les cotés, d'après l'exercice précédent, ils sont alignés si et seulement si M, A, B, C sont cocycliques.

2. On pose H l'orthocentre de ABC , H' le symétrique de H par-rapport à (BC) et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC . D'après l'exercice 2.17, on sait que $M \in \mathcal{C}$.

EXERCICE 3.29. :

On pose $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$ les cercles énoncés passant respectivement par A, B, C .

• Supposons que $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ se coupent en $O \neq A, B$. On va montrer que $O \in \mathcal{C}_C$:

$$\begin{aligned}(OB', OC') &= (OB', OA') + (OA', OC') \\ &= (CB'CA') + (BA', BC') \\ &= (CA, CB) + (BC, BA) \\ &= (AC, AB) \\ &= (AB', AC').\end{aligned}$$

Aussi, les points A, B', C', O sont cocycliques.

• Si $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_b = \{A'\}$, les triangles $BC'A'$ et $A'B'C$ sont respectivement rectangles en C' et B' . Les angles droits obtenus permettent ensuite d'affirmer que A, C', A', B' cocycliques.
(Si $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_b = \{B'\}$, le résultat se démontre de la même manière.)

EXERCICE 3.30. :

On choisit $A \in D_1$. On pose $D'_2 = r_{A, \frac{\pi}{3}}(D_2)$. Alors $C \in D'_2 \cap D_3$ ($C = r_{A, \frac{\pi}{3}}(B) \in r_{A, \frac{\pi}{3}}(D_2) = D'_2$.) Le triangle ABC équilatéral direct vérifiera alors $B \in D_2$.

EXERCICE 3.31. :

On suppose ABC direct. On pose α un troisième point tel que $B\alpha C$ soit rectangle isocèle en α extérieur à ABC . On se donne

$$s = s_{C, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}} \circ s_{B, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}}.$$

Alors $s(\beta) = \gamma$ et $s(I) = I$, autrement dit, s est la similitude de centre I , de rapport 1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On trouve alors $(\overrightarrow{I\beta}, \overrightarrow{I\gamma}) = (\overrightarrow{I\beta}, \overrightarrow{Is(\beta)}) = -\frac{\pi}{2}$ et $I\beta = I\gamma$.

On suppose $ABCD$ direct. On considère les deux similitudes $s_1 = s_{C, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}} \circ s_{A, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}}$ et $s_2 = s_{A, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}} \circ s_{C, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}}$. Dans les deux cas, on montre (comme dans l'exercice précédent)

$$s_1 = s_{I, 1, -\frac{\pi}{2}} = s_2,$$

où I est le milieu de $[AC]$. De plus, Q, S sont les images respectives de P par s_1 et Q par s_2 . Autrement dit, $s = s_1 = s_2$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoyant le segment $[PQ]$ sur $[RS]$, d'où les résultats.

EXERCICE 3.32. :