C. Holtzmann

Exercice 5.1. :

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC} \rangle &= \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) \\
&= \langle \overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD} \rangle + \langle \overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC} \rangle \\
&= \underbrace{\langle \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD} \rangle}_{=0} + \langle \overrightarrow{CD},\overrightarrow{BD} \rangle + \underbrace{\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC} \rangle}_{=0} + \langle \overrightarrow{BD},\overrightarrow{DC} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5.2. :

1. existence et unicité :

Soient $A_1 \in \mathcal{D}_1, A_2 \in \mathcal{D}_2$. On note u_1, u_2 des vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$. Soient $M_1 \in \mathcal{D}_1, M_2 \in \mathcal{D}_2$. Il existe donc une unique droite perpendiculaire si et seulement si il existe une unique solution au système d'équation :

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{M_1M_2}.u_1 &=& 0 \\ \overrightarrow{M_1M_2}.u_2 &=& 0. \end{array} \right.$$

Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{A_1M_1} = \alpha u_1$ et $\overrightarrow{A_2M_2} = \beta u_2$. On a donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha u_1 + \overrightarrow{A_1A_2} + \beta u_2$. Ainsi, $\mathcal{S}$ équivaut à

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha \parallel u_1 \parallel^2 + \overrightarrow{A_1A_2}.u_1 + \beta u_2.u_1 &=& 0 \\ \alpha u_1.u_2 + \overrightarrow{A_1A_2}.u_2 + \beta \parallel u_2 \parallel^2 &=& 0. \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est

$$\det \begin{pmatrix} \parallel u_1 \parallel^2 & u_2.u_1 \\ u_1.u_2 & \parallel u_2 \parallel^2 \end{pmatrix} = \parallel u_1 \parallel^2 \parallel u_2 \parallel^2 - u_1.u_2$$

qui est non nul car $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles car non coplanaires.
On en déduit l'existence et l'unicité de la solution en α, β, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de M_1 et M_2.

2. La distance :

Il faut vérifier que $M_1M_2 = \min\{N_1N_2 | N_1 \in \mathcal{D}_1, N_2 \in \mathcal{D}_2\}$. Soient donc $N_i \in \mathcal{D}_i$ pour $i = 1, 2$. On a

$$\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2}$$

L'orthogonalité des vecteurs entraîne

$$\parallel \overrightarrow{N_1N_2} \parallel^2 = \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \parallel^2 + \parallel \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \parallel \geqslant \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \parallel^2 .$$

Exercice 5.3. :

On a

$$\begin{array}{lcl} \Delta_1 \perp \mathcal{D}_2 &,& \Delta_1 \perp \mathcal{D}_3 \\ \Delta_2 \perp \mathcal{D}_1 &,& \Delta_2 \perp \mathcal{D}_3 \\ \Delta_3 \perp \mathcal{D}_1 &,& \Delta_3 \perp \mathcal{D}_2. \end{array}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_1 \perp \Delta_1, \Delta_3$. La droite $\mathcal{D}_1$ est donc une perpendiculaire commune à Δ_2 et Δ_3.

Exercice 5.4. :

Attention, il faut supposer que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est non parallèle au plan $\langle \overrightarrow{\mathcal{D}_1}, \overrightarrow{\mathcal{D}_2} \rangle$ et au moins $l \geqslant d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

On note H_1, H_2 les points respectifs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tels que (H_1H_2) soit la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$. On note $u = \overrightarrow{H_1H_2}$. On se donne d_1, d_2 des vecteurs directeurs unitaires respectifs de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan de direction P et M_1, M_2 les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec respectivement $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Il existe alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{H_1M_1} = \lambda_1 d_1$ et $\overrightarrow{H_2M_2} = \lambda_2 d_2$. On a alors $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda_1 d_1 + u + \lambda_2 d_2$. Comme u est orthogonal à d_1 et d_2, on obtient

$$\parallel \overrightarrow{M_1M_2} \parallel^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \parallel u \parallel^2 .$$

Soit maintenant s une affinité d'axe $\langle u \rangle$, de direction $u^\perp$ et de rapport k. Elle envoie M_1, M_2 sur deux points M_1', M_2' tels que $\overrightarrow{H_1M_1'} = k\overrightarrow{H_1M_1} = k\lambda_1 d_1$ et $\overrightarrow{H_2M_2'} = k\overrightarrow{H_2M_2} = k\lambda_2 d_2$. On en déduit que

$$\parallel M_1'M_2' \parallel^2 = k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \parallel u \parallel .$$

On vérifiera également (à l'aide par exemple du théorème de Thalès) que $\overrightarrow{M_1'M_2'} \in P$. Finalement, si on peut prendre $k^2 = \frac{l^2 - \|u\|^2}{M_1M_2^2 - \|u\|^2}$, on trouve M_1', M_2' les extrémités du segment cherché.
(Ne pas oublier de traiter le cas où $M_1M_2 = \parallel u \parallel$.)

Exercice 5.5. :

L'assertion est fausse. Considérons l'espace euclidien orienté, vectorialisé en un point O de base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $\mathcal{P}_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{P}_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(0,0,0), B(0,1,1), C(1,0,1), D(1,1,0)$. Les projections des points $ABCD$ sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ forment respectivement des carrés (qui sont donc des parallélogrammes.) Néanmoins, A, B, C, D sont des sommets d'un cube de coté 1 non coplanaires (et de fait, $ABCD$ n'est certainement pas un parallélogramme.)

Exercice 5.6. :

1. Pour bien comprendre : cas du plan :

On se donne trois points A, B, C du plan non alignés. On va montrer qu'il y a au maximum trois possibilités de droites Δ telle que $d(A, \Delta) = d(B, \Delta) = d(C, \Delta)$.

Analyse : Soit en effet Δ une telle droite. On pose H_A, H_B, H_C les projections orthogonales respectives de

A, B, C sur Δ. On obtient donc trois vecteurs $u_A = \overrightarrow{AH_A}, u_B = \overrightarrow{BH_B}, u_C = \overrightarrow{CH_C}$ de même norme et parallèles. On en déduit

$$u_A = \pm u_B = \pm u_C.$$

Par exemple, on a $u_A = u_B = -u_C$. On a alors une seule possibilité pour Δ qui est

$$\Delta = t_{u_A}(AB).$$

Il y a donc au maximum autant de possibilités de droites que de cas $u_A = \pm u_B = \pm u_C$ possibles, qui sont au nombre de trois (le cas $u_A = u_B = u_C$ étant impossible car A, B, C sont non alignés).

Synthèse : Pour chaque droite $(AB), (BC), (CA)$, on pose respectivement I_C, I_A, I_B les projections des points C, A, B sur $(AB), (BC), (CA)$. Les médiatrices de $[I_C C], [I_A A], [I_B B]$ répondent au problème.

2. Maintenant, le cas de l'espace :

On se donne quatre points A, B, C, D de l'espace non coplanaires. On va montrer qu'il y a au maximum sept possibilités de plans $\mathcal{P}$ telle que $d(A, \mathcal{P}) = d(B, \mathcal{P}) = d(C, \mathcal{P})$.

Analyse : Soit en effet $\mathcal{P}$ une telle droite. On pose H_A, H_B, H_C, H_D les projections orthogonales respectives de A, B, C, D sur $\mathcal{P}$. On obtient donc quatre vecteurs $u_A = \overrightarrow{AH_A}, u_B = \overrightarrow{BH_B}, u_C = \overrightarrow{CH_C}, u_D = \overrightarrow{DH_D}$ de même norme et parallèles. On en déduit

$$u_A = \pm u_B = \pm u_C = \pm u_D.$$

Si deux vecteurs parmi u_B, u_C, u_D sont égaux à u_A, par exemple $u_A = u_B = u_C = -u_D$, on a alors une seule possibilité pour $\mathcal{P}$ qui est

$$\mathcal{P} = t_{u_A}(\langle\ ABC\ \rangle).$$

Sinon, s'il n'existe qu'un seul vecteur parmi u_B, u_C, u_D égal à u_A, par exemple u_B, on a alors une seule possibilité pour $\mathcal{P}$ qui est

$$\mathcal{P} = t_{u_A}(\langle\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}\ \rangle).$$

(Notons que $\mathcal{P}$ est bien un plan car A, B, C, D sont non coplanaires.)

Il y a donc au maximum autant de possibilité de droites que de cas $u_A = \pm u_B = \pm u_C \pm u_D$ possibles, qui sont au nombre de sept (le cas $u_A = u_B = u_C = u_D$ étant impossible car A, B, C, D sont non alignés).

On pensera à faire la synthèse comme dans le cas du plan.