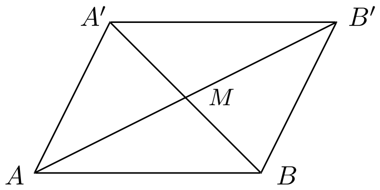
C. Holtzmann

1 Géométrie affine

Exercice 1.1. :



Remarque : En général, on a :

$$\begin{aligned} M \text{ est le milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Retour à l'exercice :

Soit M le milieu de $[AB']$. On montre que M est milieu de $[A'B]$ en montrant $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'M}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B} &= \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{B'M} + \overrightarrow{AB} && (M \text{ est milieu de [AB']}) \\ &= \overrightarrow{A'M} + \underbrace{\overrightarrow{B'M} + \overrightarrow{A'B'}}_{=\overrightarrow{A'M}} && (ABB'A' \text{ parallél.}) \\ &= 2\overrightarrow{A'M} \end{aligned}$$

Exercice 1.2. :

Existence : $A, B \in \mathcal{D} = A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$

Unicité : Soit $\mathcal{D} = C + \overrightarrow{D}$. Supposons que $A, B \in \mathcal{D}$. Alors

$$\begin{aligned} C + \overrightarrow{D} &= A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{D} \\ &= A + \overrightarrow{D} && \text{car } A, C\mathcal{D} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{D}. \end{aligned}$$

De plus, $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overrightarrow{D} = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$.

Exercice 1.3. :

On note $\mathcal{A}$ le plan affine sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1. *Nombre de points de $\mathcal{A}$* :

Soit O un point fixé de $\mathcal{A}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \to & (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \\ M & \mapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

est une bijection. On a donc

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \mathrm{card}((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2) = 9.$$

2. *Chaque droite a 3 points* :

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Il existe donc $A \in \mathcal{A}$ et $\vec{u} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ tels que

$$\mathcal{D} = \{A + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \to & \mathcal{D} \\ \lambda & \mapsto & A + \lambda u \end{array}$$

est donc une bijection. Le nombre de points de $\mathcal{D}$ est donc $\mathrm{card}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3$.

3. *Nombre de droites de $\mathcal{A}$* :

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des droites de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des sous-parties à deux éléments de $\mathcal{A}$. Pour tous deux points A, B, il passe une droite $A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$. L'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & \{A, B\} & \mapsto & A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle \end{array}$$

est donc bien définie. On en déduit que

$$\mathcal{A}_2 = \bigsqcup_{\mathcal{D} \in \mathcal{U}} f^{-1}(\mathcal{D})$$

et donc que

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}_2) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{U}} \mathrm{card}(f^{-1}(\mathcal{D})).$$

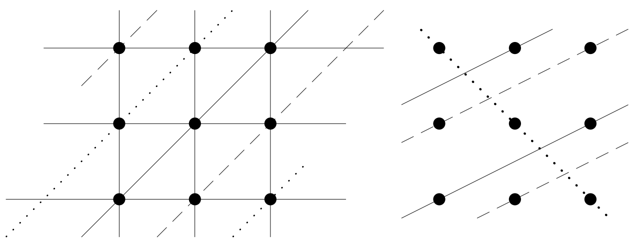
Or, la question précédente nous dit que chaque droite contient exactement trois points. Il existe donc $\binom{3}{2} = 3$ éléments dans $f^{-1}(\mathcal{D})$. On en déduit

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}_2) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{U}} 3 = 3.\mathrm{card}(\mathcal{U}).$$

Finalement, on obtient

$$\mathrm{card}(\mathcal{U}) = \frac{\mathrm{card}(\mathcal{A}_2)}{3} = 12$$

Les droites sont les suivantes :



4. *Par chaque point passent 4 droites* :

Soit $\sim$ la relation de congruence déterminée sur $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 - \{(0,0)\}$ par $u \sim v$ si u et v sont colinéaires. Il s'agit ici de déterminer $\mathrm{card}(V)$ où V est un système de représentants des classes de $\sim$. On a

$$V = \{(1,0), (0,1), (1,1), (1,2)\}.$$

5. *Pour une direction donnée,il existe 3 droites parallèles* :

Soit D une direction fixée et $\simeq$ une relation de congruence sur $\mathcal{A}$ donnée par $A \simeq B$ si $A + D = B + D$. Soit V un système de représentants des classes de $\simeq$. Le nombre demandé correspond à card(V). On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A+D\\ &= \bigsqcup_{A\in V} A+D\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \sum_{A\in V}\operatorname{card}(A+D) = \sum_{A\in V} 3 = \operatorname{card}(V)\times 3$$

On en déduit

$$\operatorname{card}(V) = \frac{\operatorname{card}(\mathcal{A})}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Exercice 1.4. :

⚠ On va supposer que l'espace affine est pris sur un corps non isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_1$.

$\Leftarrow$ évident.
$\Rightarrow$: On suppose que $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ est un sous-espace affine. On note F_1 et F_2 les espaces vectoriels respectivement associés à $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
Supposons que $\mathcal{F}_1\not\subset\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_2\not\subset\mathcal{F}_1$. Il existe alors $A\in\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_2$ et $B\in\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_1$. Soit $\boldsymbol{M = A + 2\overrightarrow{AB}}$. Comme $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ est un espace affine, on a

$$M\in\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$$

autrement dit, on a

$$M\in\mathcal{F}_1 \text{ ou } M\in\mathcal{F}_2.$$

Si $M\in\mathcal{F}_1$, comme $A\in\mathcal{F}_1$, on a $\overrightarrow{AM}\in F_1$ et donc

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}\in F_1$$

ce qui implique $B\in\mathcal{F}_1$. C'est contradictoire.
Si $M\in\mathcal{F}_2$, comme $B\in\mathcal{F}_2$, on a $\overrightarrow{BM}\in F_2$. Or B est le milieu de $[AM]$. Ainsi, on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}\in F_2$$

ce qui implique $A\in\mathcal{F}_2$. C'est encore contradictoire.

Exercice 1.5. :

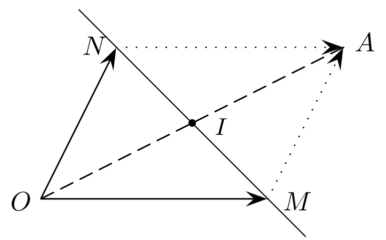
Si le sous-espace est affine, la propriété est évidente.

Supposons maintenant que la propriété soit réalisée. Soit $O\in\mathcal{F}$. On pose $D=\{\overrightarrow{OM}\mid M\in\mathcal{F}$. On va montrer que D est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ce qui signifiera que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine.

► Stabilité par multiplication :
Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\overrightarrow{OM}\in D$. Soit $N = O+\lambda\overrightarrow{OM}$. Par hypothèse, on a $(OM)\subset\mathcal{F}$. On en déduit directement $N\in\mathcal{F}$ et donc

$$\lambda\overrightarrow{OM}\in D.$$

► Stabilité par addition :
Soient $OM, ON\in D$. On pose $A = O+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.



Par hypothèse, on a $(NM)\subset\mathcal{F}$, ainsi si I est le milieu I de $[NM]$, on a $I\in\mathcal{F}$. Toujours par hypothèse, on a donc $(OI)\subset\mathcal{F}$.
Par construction, $OMAN$ est un parallélogramme. Comme les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu, on a $A\in(OI)\subset\mathcal{F}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA}\in D.$$

Exercice 1.6. :

On note $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ la collection de droites distinctes données. On démontrera la propriété énoncée par récurrence sur $n\geqslant 2$.

► Cas où $n=2$:

Par hypothèse, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent, on note O le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Ainsi, on a

$$\mathcal{D}_1 = O+D_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 = O+D_2.$$

Elles son contenues dans le plan $A+\langle\ D_1, D_2\ \rangle$.

► Cas où $n\geqslant 2$:

On note $A_1,\dots,A_n$ les points d'intersections respectifs de $\mathcal{D}_{n+1}$ avec $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$.

• Supposons que les droites $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ soient concourantes. On note O le point de concourance.
S'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $A_i = O$, alors les droites $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{n+1}$ sont concourantes en O.
Sinon, on a $\overrightarrow{OA_i}\neq\vec{0}\ \forall\ i=1,\dots,n$. De plus, on a

$$\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_i}\in\langle\ \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}}\ \rangle.$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a donc

$$\mathcal{D}_i = O+\langle\ \overrightarrow{OA_i}\ \rangle\in O+\langle\ \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}}\ \rangle.$$

Les droites sont donc coplanaires.

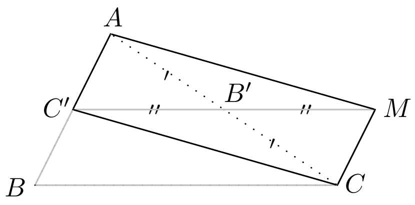
• Supposons maintenant que les droites ne soient pas concourantes. Il existe donc $j\in[\![2,n]\!]$ tels que $A_1\neq A_j$. Soit $B\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_j$.
B est distinct de A_1, sinon, $\mathcal{D}_{n+1}=\mathcal{D}_j$.
Si on note $\mathcal{P} = B+\langle\ \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}\ \rangle$, on a alors

$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_j, \mathcal{D}_{n+1}\in\mathcal{P}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, toutes les droites $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ sont dans le plan $\mathcal{P}$. Elles sont finalement toutes coplanaires.

Exercice 1.7. :

1.



Les quadrilatères $AMCC'$ et $C'MCB$ sont des parallélogrammes :

- cas de $AMCC'$:

Les segments $[AC]$ et $[C'M]$ se coupent par définition en leur milieu B'.

- cas de $C'MCB$:

On a $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{CM}$ (respectivement d'après la définition de C' comme milieu de $[AB]$ puis d'après le fait que $C'AMC$ est un parallélogramme.)

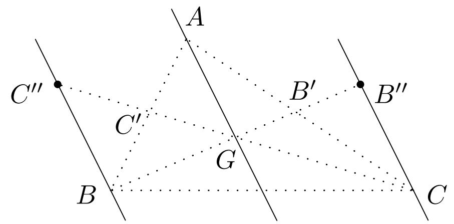
Théorème des milieux :

On note $\mathcal{D}$ une droite passant par C'.
$\rightsquigarrow$ Supposons que que $\mathcal{D}$ passe par B'. Alors, d'après les résultats précédents, $BCMC'$ est un parallélogramme. On en déduit que $\mathcal{D} = (C'B') = (C'M)$ est parallèle à (BC).
$\rightsquigarrow$ Supposons que que $\mathcal{D}//(BC)$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{D}//(BC)\\(BC)//(C'B')\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{D}//(C'B').$$

Or $\mathcal{D}$ et $(C'B')$ se coupent en C'. Étant déjà parallèles, elles sont identiques et donc $B' \in \mathcal{D}$.

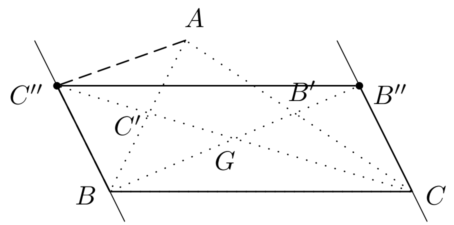
2.



- $(CB'')//(AG)//(BC'')$:

Par la propriété des diagonales qui se coupent en leur milieu, on sait que $AGBC''$ et $AGCB''$ sont des parallélogrammes, d'où $(AG)//(BC'')$ et $(AG)//(CB'')$.

- G milieu de CC'' :



On va montrer que $BCB''C''$ est un parallélogramme. Ses diagonales (CC'') et (BB'') se coupent en G. Par la propriété des diagonales, on obtiendra G milieu de $[BB'']$ et $[CC'']$.
Par la partie précédente, on a $(BC'')//(CB'')$. Il reste à montrer que $(B''C'')//(BC)$:
Le quadrilatère $AC''BG$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent par définition en leur milieu. On obtient

$$(AC'')//(BG) = (GB').$$

Dans le triangle ACC', comme B' est le milieu de $[AC]$ et $(B'G)//(AC'')$, le théorème des milieux nous donne que G est le milieu de $[CC'']$.

- Concourance des médianes :

Dans le triangle $CC''B$, on utilise le théorème des milieux, avec $(C''B)//(AG)$. Si on note $A' = (AG) \cap (BC)$, on obtient donc A' milieu de $[BC]$. Autrement dit, $[AA'$ est la troisième médiane et coupe les deux autres en G.

- Distance :

Par construction, on a C' milieu de $[C''G]$ et on a montré que G est milieu de $[C''C]$. Il est donc situé au deux-tiers de la médiane $[CC']$ en partant de C. Le problème étant symétrique par rapport à A, B, C, il en est de même pour toutes les autres médianes.

Exercice 1.8. :

Supposons que l'espace affine soit associé à un espace vectoriel E de dimension n.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= B_0 + \langle\, \overrightarrow{B_0B_1}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_k}\,\rangle\\ &= B_0 + \{\lambda_1\overrightarrow{B_0B_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{B_0B_k} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}\end{aligned}$$

Si on note $(b_0^{(i)}, \ldots, b_n^{(i)})$ les coordonnées de B_i dans le repère affine, la matrice des $\overrightarrow{B_0B_1}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_k}$ est

$$A = \left(b_i^{(j)} - b_0^{(j)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant k}.$$

Un système d'équation paramétrique en $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ est donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& b_0^{(1)} + \lambda_1(b_1^{(1)} - b_0^{(1)}) + \ldots \lambda_k(b_k^{(1)} - b_0^{(1)})\\ & \ldots & \\ x_i &=& b_0^{(1)} + \lambda_1(b_1^{(i)} - b_0^{(i)}) + \ldots \lambda_k(b_k^{(i)} - b_0^{(i)})\\ & \ldots & \\ x_n &=& b_0^{(1)} + \lambda_1(b_1^{(n)} - b_0^{(n)}) + \ldots \lambda_k(b_k^{(n)} - b_0^{(n)}).\end{array}\right.$$

Exercice 1.9. :

Si l'équation $AX = B$ n'admet pas de solutions, on a $\mathcal{F} = \emptyset$. C'est un espace affine.

Si maintenant $AX = B$ admet au moins un solution X_0, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= X_0 + \{X - X_0 \in \mathbb{R}^n \mid AX = AX_0\}\\ &= X_0 + \{X - X_0 \in \mathbb{R}^n \mid A(X - X_0) = 0\}\\ &= X_0 + \{Y \in \mathbb{R}^n \mid AY = 0\}\end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{S}_0 := \{Y \in \mathbb{R}^n \mid AY = 0\}$ étant un e.v., $\mathcal{F}$ est un espace affine.

Remarque : X_0 est appelé une *solution particulière* du système et $\mathcal{S}_0$ est appelé ensemble des *solutions de* *l'équation homogène.*

Exercice 1.10. :

On note $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ les ensembles solutions des équations $a_1x_1 + \ldots a_nx_n = b$ et $a'_1x_1 + \ldots a'_nx_n = b'$.
Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont les noyaux des applications linéaires de matrice $A = (a_1, \ldots, a_n)$ et $A = (a'_1, \ldots, a'_n)$. Ce sont donc des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ à la seule condition que A et A' sont non nuls. On se place donc dans ce cadre.

On va montrer que :

$$\left(\mathcal{H} \mathbin{//} \mathcal{H}'\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(Vect(A) = Vect(A')\right).$$

Le parallélisme des hyperplans équivaut à l'égalité $H = H'$, où H et H' sont les ensembles de solutions respectifs des équations homogènes $a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0$ et $a'_1x_1 + \ldots a'_nx_n = 0$.

► Si A et A' ont colinéaires, alors il est clair que $H = H'$.

► Si $H = H'$, on pose $v_1, \ldots, v_{n-1}$ une base de $H = H'$. Soit alors P la matrice des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ & X & \mapsto & {}^tPX \end{array}$$

est de rang $rg({}^tP) = rg(P) = n - 1$. Autrement dit, son noyau est de dimension 1. Par hypothèse, on a

$$A, A' \in \ker(\varphi).$$

On en déduit donc que A et A' sont colinéaires.

Exercice 1.11. :

1. *équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A = (1,0,1)$ de vecteurs dir. $u = (0,2,1)$ et $v = (1,-1,0)$:*

On cherche à déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{P}$ soit solution de $ax + by + cz = d$. Or $\mathcal{P}$ contient $A = (1,0,1)$, $A_u = A + u = (1,2,2)$ et $A_v = A + v = (2,-1,1)$. a, b, c, d vérifient donc le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + c & = & d \\ a + 2b + 2c & = & d \\ 2a - b + c & = & d. \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est $(a,b,c,d) \in Vect\big(((1,1,-2,-1))\big)$. Une équation cartésienne du plan est donc

$$\boxed{\text{x+y-2z+1=0.}}$$

2. *équation du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B = (0,1,0)$:*

$\mathcal{P}'$ ayant même direction que $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des solutions d'une équation du type $x + y - 2z = d'$. Comme $B = (0,1,0) \in \mathcal{P}'$, on a $d' = 0 + 1 - 2 \times 0 = 1$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$ est donc

$$\boxed{\text{x+y-2z-1=0.}}$$

3. *équation du plan $\mathcal{P}''$ parallèle à $\mathcal{P}'$ passant par $I = \frac{A+B}{2}$:*

De même que tout à l'heure, $\mathcal{P}''$ a une équation du type $x + y - 2z = d''$. On pourrait calculer d'' de la même manière que tout à l'heure, mais il existe une autre méthode. Comme A est solution de $x + y - 2z = -1$ et B solution de $x + y - 2z = 1$, on a que $I = \frac{A+B}{2}$ est solution de $x + y - 2z = \frac{-1+1}{2} = 0$. Autrement dit, une équation de $\mathcal{P}''$ est

$$\boxed{\text{x+y-2z=0.}}$$

Exercice 1.12. :

1. On note $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ les solutions respectives des équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & 0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'_1x + b'_1y + c'_1z & = & 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z & = & 0. \end{array} \right.$$

► *Droites vectorielles :*

On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix}$.
Alors $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ sont les noyaux respectifs des applications linéaires associées aux matrices A et A'. Ce sont des espaces vectoriels de dimension 1 si et seulement si $rg(A) = rg(A') = 2$.
Si on note $A_i = (a_i, b_i, c_i)$ et $A'_i = (a'_i, b'_i, c'_i)$ pour $i = 1, 2$, on obtient que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ sont des droites vectorielles si et seulement si $\{A_1, A_2\}$ et $\{A'_1, A'_2\}$ sont des familles de vecteurs linéairement indépendants.

► $\left(\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0\right) \Leftrightarrow \left(Vect(A_1, A_2) = Vect(A'_1, A'_2)\right)$:

Notons $P = Vect(A_1, A_2)$ et $P' = Vect(A'_1, A'_2)$.
Si $P = P'$, alors il est clair que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0$.

Supposons maintenant que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0$. On prend V un vecteur directeur de $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0$. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & {}^tVX. \end{array}$$

Elle est surjective de noyau $Vect(A_1, A_2)$. De plus, on sait par hypothèse que $A'_1, A'_2 \in \ker(g)$. On en déduit donc $Vect(A_1, A_2) = Vect(A'_1, A'_2)$.

2. On note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les solutions respectives des équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'_1x + b'_1y + c'_1z & = & d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z & = & d'_2. \end{array} \right.$$

► *Droites affines :*

Si $\mathcal{D}$ est une droite affine, alors elle est non vide. On note B_0 un point de $\mathcal{D}$. On a alors $\mathcal{D} = B_0 + \mathcal{D}_0$, où $\mathcal{D}_0$ est une droite vectorielle. On obtient ainsi, d'après la question précédents, que A_1 et A_2 sont linéairement indépendants.

Si A_1 et A_2 sont linéairement indépendants, on a vu que l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

était surjective. On a donc que $h^{-1}\big((d_1, d_2)\big)$ est une droite affine.

Les conditions sont semblables pour l'équation $\mathcal{D}'$.

- $\big(\mathcal{D}//\mathcal{D}'\big) \Leftrightarrow \big(Vect(A_1, A_2) = Vect(A'_1, A'_2)\big)$:

Les directions de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont respectivement $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$. Les droites sont parallèles si et seulement si leurs direction sont identiques, autrement dit, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0$. D'après la question précédente, ceci est vrai qi et seulement si $Vect(A_1, A_2) = Vect(A'_1, A'_2)$.

Exercice 1.13. :

On se place dans l'espace affine $\mathcal{E}$ d'espace vectoriel associé $\mathbb{R}^n$. On se donne une droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathcal{E}$ et on note $\mathcal{D} = A + Vect(u)$, où u est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ non nul.

On se donne un repère affine $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathcal{R} = (A, \mathcal{B}),$$

où $\mathcal{B} = \{u, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce repère affine,

$$\mathcal{D} = \{(x, 0, \ldots, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{E} - \mathcal{D} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}.$$

L'application

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x_1, (x_2, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est un homéomorphisme tel que $\psi(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1}\{0\})) = \mathcal{D}$. On en déduit donc que le nombre de composantes connexes de $\mathcal{D}$ est celui de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1} - \{0\})$, qui est 2 dans le cas $n = 2$ et 1 dans le cas $n \geqslant 3$.