Applications affines

Exercice 1.14. :

Supposons que E soit un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Hypothèse : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda_x x$.

Homothétie vectorielle : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

► Si f vérifie l'hypothèse, c'est une homothétie vectorielle :

Il s'agit de vérifier que λ_x est indépendant de x, autrement dit, que $\lambda_x = \lambda_y$ pour tout $x, y \in E$.

Si x et y sont linéairement indépendants, alors on a

$$\begin{array}{ccc} f(x+y) & = & f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \\ \shortparallel & & \\ \lambda_{x+y}(x+y) & = & \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y \end{array}$$

Par unicité de l'écriture, on obtient

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Si x et y sont liés, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tels que $\alpha x + \beta y = 0$. Alors

$$\begin{aligned} 0 = f(\alpha x + \beta y) &= \alpha \lambda_x x + \beta \lambda_y y \\ &= \lambda_x \alpha x + \lambda_x \beta y - \lambda_x \beta y + \beta \lambda_y y \\ &= \lambda_x \underbrace{(\alpha x + \beta y)}_{=0} - \beta y (\lambda_x - \lambda_y) \\ &= \beta y (\lambda_y - \lambda_x). \end{aligned}$$

Comme $\beta y \neq 0$, on en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.

Exercice 1.15. :

► Montrons qu'il existe λ tel que $\overrightarrow{\varphi} = \lambda Id_E$:

Soit $x \in E$ et $A \in \mathcal{E}$. On pose $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = x$. L'image de la droite (AB) par φ étant une droite parallèle, il existe λ_x tel que $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \lambda_x \overrightarrow{AB}$, autrement dit,

$$\overrightarrow{\varphi}(x) = \lambda_x x.$$

L'exercice précédent nous dit qu'il existe λ tel que $\overrightarrow{\varphi} = \lambda Id_E$.

► L'ensemble des applications affines d'applications vectorielles associées λId sont des translations ou des homothéties.

Exercice 1.16. :

1. s est une application linéaire :
Pour tout $x, x' \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $u, u' \in F, v, v' \in G$ tels que $x = u + v,\ x' = u' + v'$. On a alors

$$\begin{aligned} s(x + \lambda x') &= s\big(\underbrace{(u + \lambda u')}_{\in F} - \underbrace{(u + \lambda u')}_{\in G}\big) \\ &= s(x) + \lambda s(x'). \end{aligned}$$

s est une involution : On vérifie (facilement) que $s^2 = Id$.

2. Comme $O' \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{OO'} \in F$ et donc $s_F(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{OO'}$. On a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = s_F(\overrightarrow{OO'}) + s_F(\overrightarrow{O'M}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OO'} + s_F(\overrightarrow{O'M}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{O'M'} = s_F(\overrightarrow{O'M}). \end{aligned}$$

3. σ est affine et ne dépend pas de O :

On note que $\sigma(O) = O$ par définition. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= O + s_F(\overrightarrow{OM}) \\ &= \sigma(O) + s_F(\overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

s_F étant linéaire, σ est affine.
De plus, si $O' \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= O + s_F(\overrightarrow{OM}) \\ &= \sigma(O) + s_F(\overrightarrow{OM}) \\ &= \sigma(O') + s_F(\overrightarrow{O'M}) \\ &= O' + s_F(\overrightarrow{O'M}). \end{aligned}$$

Exercice 1.17. :

1. D'après le cours, on sait que si $E = \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \oplus \operatorname{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id)$, alors il existe une unique décomposition

$$\varphi = t_u \circ \psi = \psi \circ t_u$$

où $\overrightarrow{\varphi}(u) = u$ et ψ est une application affine avec un point fixe. Notons que, comme $\overrightarrow{\varphi}$ est une symétrie, alors elle est involutive ($\overrightarrow{\varphi}^2 = Id$).

► On montre que $E = \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \oplus \operatorname{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id)$:

Grâce au théorème du rang, il suffit de montrer que $\ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \cap \operatorname{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id) = \emptyset$. Soit donc $x \in \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \cap \operatorname{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id) = \emptyset$.
$x \in \operatorname{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id) \Rightarrow \exists y \in E \ \mid\ x = \varphi(y) - y$.
$x \in \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \Rightarrow \overrightarrow{\varphi}(x) = x$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{\varphi}\big(\overrightarrow{\varphi}(y) - y\big) \\ &= \overrightarrow{\varphi}^2(y) - \overrightarrow{\varphi}(y) \\ &= \overrightarrow{\varphi}(y) - \overrightarrow{\varphi}(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

► ψ est une symétrie affine :
L'application ψ admet un point fixe, noté O. Elle s'écrit donc

$$\psi(M) = O + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}),$$

avec $\overrightarrow{\varphi}$ une symétrie vectorielle. C'est la définition d'une symétrie affine.

2. $\overrightarrow{\varphi}^2 = Id \quad \not\Rightarrow \varphi^2 = Id$:
Prenons par exemple une symétrie glissée $t_u \circ \psi$, où $u \in \ker(\overrightarrow{\psi} - Id)$ non nul et ψ une symétrie affine par rapport à un hyperplan $\mathcal{F}$.
$\forall M \in \mathcal{F},\ \varphi^2(M) = M + 2u \neq M$.

Exercice 1.18. :

1. Existence :

Soit $M \in \mathcal{E}$. Par hypothèse, il existe $P \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(M) = \varphi^2(P)$. On obtient directement

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{M\varphi(P)}) = \overrightarrow{0}.$$

2. Unicité :

► On montre que $E = \ker(\overrightarrow{\varphi}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi})$:

Grâce au théorème du rang, il suffit de montrer que $E = \ker(\overrightarrow{\varphi}) + \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi})$.
Soit donc $x \in E$ et $O \in \mathcal{E}$. Il existe alors $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(O)M} = x$. Par la question précédente, il existe $P \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{M\varphi(P)} \in \ker(\overrightarrow{\varphi})$. On en déduit

$$\begin{array}{rcl} x & = & \overrightarrow{\varphi(0)M} \\ & = & \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} + \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(M)} \\ & = & \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(M)} \\ & \in & \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi}) + \ker(\overrightarrow{\varphi}). \end{array}$$

► Supposons qu'il existe $P, P' \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{M\varphi(P)}, \overrightarrow{M\varphi(P')} \in \ker(\overrightarrow{\varphi})$. On a

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{M\varphi(P)} & = & \overrightarrow{M\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi(P')\varphi(P)} \\ & = & \overrightarrow{M\varphi(P')} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{P'P}) \end{array}$$

D'où $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{P'P}) \in \mathrm{Im}\overrightarrow{\varphi} \cap \ker(\overrightarrow{\varphi})$. Or $\mathrm{Im}\overrightarrow{\varphi} \cap \ker(\overrightarrow{\varphi}) = \{0\}$. Finalement, on obtient bien $\varphi(P) = \varphi(P')$. Le résultat de l'unicité de u en découle immédiatement.

3. Exemple : Toute projection affine.

Exercice 1.19. :

Toute application affine s'écrit $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$ pour tous $A, M \in \mathcal{E}$. f est donc uniquement déterminée par l'image d'un point $A \in \mathcal{E}$ quelconque et d'une base de E, autrement dit, f est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine.

Exercice 1.20. :

Notons $\mathcal{A}ff(\mathcal{T})$ l'ensemble des application affines conservant $\mathcal{T}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \mathcal{A}ff & \longrightarrow & \mathfrak{S}_4(A,B,C,D) \\ & f & \mapsto & \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) \end{pmatrix} \end{array}$$

On va montrer que χ est un bien définie puis que c'est un homomorphisme bijectif.

► χ est bien défini :
Il faut vérifier que l'image d'un sommet est un sommet. En effet, comme f est une application affine, elle envoie tout segment $[MN]$ sur un segment $[f(M)f(N)]$. Tout sommet doit donc être envoyé sur l'extrémité d'une arrête, faute de quoi l'image de $\mathcal{T}$ ne sera pas conservée. De plus, le même argument montre que deux sommets disjoints sont envoyés sur deux sommets disjoints.

► χ est un morphisme : si $M \in \{A, B, C, D\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \chi(f \circ g)(M) & = & f \circ g(M) \\ & = & f\big(g(M)\big) \\ & = & \chi(f)(g(M)) \\ & = & \chi(f)\big(\chi(g)\big)(M) \\ & = & \chi(f) \circ \chi(g)(M) \end{array}$$

► χ est injective :
Si $\chi(f) = Id$, alors f fixe les points A, B, C, D qui forment un repère affine de l'espace. C'est donc l'identité.

► χ est surjective :
Comme les translations engendrent $\mathfrak{S}_4$, il suffit de vérifier que les transpositions ont un antécédent. Soit donc τ une transposition de $\mathfrak{S}_4$, par exemple $\tau = (A, B)$. On pose I le milieu de $[AB]$. Si s est la symétrie affine de plan ICD et d'axe (AB), on a $\chi(s) = \tau$.
(De même, toutes les autres transpositions ont des antécédents).

Exercice 1.21. :

1. Les points A, B, C forment un repère affine du plan. φ est donc entièrement déterminé.

2. ► $\overrightarrow{\varphi}$ est injective :
Soit x tel que $\overrightarrow{\varphi}(x) = 0$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} 0 = \overrightarrow{\varphi}(x) & = & \alpha\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) + \beta\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AC}) \\ & = & \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BA}. \end{array}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ étant linéairement indépendants, on obtient $\alpha = \beta = 0$ et donc $x = 0$.

► φ est injective car $\overrightarrow{\varphi}$ l'est.
En effet, supposons que $\varphi(M) = \varphi(N)$, alors $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{MN}) = 0$ et donc $\overrightarrow{MN} = 0$, autrement dit, $M = N$.

3. $\varphi^3 = Id$ car elle fixe les trois points du plan A, B, C.

4. Le centre de gravité G du triangle A, B, C est point fixe de φ. En effet, il est déterminé par

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} \varphi(G) & = & \varphi(A) + \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AC})\big) \\ & = & B + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \\ & = & G. \end{array}$$

5. Matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1.22. :

Soit $O \in \mathcal{E}$ fixé. $\mathcal{H} = \{t_u \circ \varphi_O \mid u \in E, \varphi_O(M) = O + f(\overrightarrow{OM})\ \forall M \in \mathcal{E}\}$. On va montrer que $\mathcal{H}$ est l'ensemble cherché.

► Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a $\overrightarrow{\varphi} = f$.

► Supposons maintenant que ψ soit une application affine vérifiant $\overrightarrow{\psi} = f$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a alors

$$\begin{array}{rcl} \psi(M) & = & \psi(O) + f(\overrightarrow{OM}) \\ & = & \overrightarrow{O\psi(O)} + \underbrace{O + f(\overrightarrow{OM})}_{\varphi_O(M)} \\ & = & t_{\overrightarrow{O\psi(O)}} \circ \varphi_O(M) \end{array}$$

Exercice 1.23. :

On note $\psi = \varphi \circ h(O,\lambda) \circ \varphi^{-1}$.

Si $\lambda = 1$, $\psi = Id$.
Si $\lambda \neq 1$, $\psi = h(\varphi(O), \lambda)$:
On a $\overrightarrow{\psi} = \lambda Id$. C'est donc une homothétie de rapport lambda. De plus, on a $\psi(\varphi(O)) = \varphi(O)$.

Exercice 1.24. :

(Rappel) : Le centre Ω d'une homothétie de rapport $\mu \neq 1$ est donné par les formules suivantes :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \mu \overrightarrow{\Omega M}$$

ou

$$\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{1-\mu}\overrightarrow{MM'}$$

où M' est l'image d'un point $M \in \mathcal{E}$ quelconque.

1. $$\boxed{h(B,\lambda') \circ h(A,\lambda) = \begin{cases} h(O, \lambda'\lambda) & \text{si } \lambda'\lambda \neq 1 \\ \text{où } O = A + \frac{1-\lambda}{1-\lambda'\lambda}\overrightarrow{AB} & \\ t_{(1-\lambda')\overrightarrow{AB}} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

On pose $\psi = h(B,\lambda') \circ h(A,\lambda)$. On a alors $\overrightarrow{\psi} = \lambda'\lambda Id$.

► Si $A' = \psi(A)$, on a $\overrightarrow{AA'} = (1-\lambda')\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{array}{rcl} \psi(A) & = & h(B,\lambda') \circ h(A,\lambda)(A) \\ & = & h(B,\lambda')(A) \\ & = & B + \lambda'\overrightarrow{BA} \\ & = & A + \overrightarrow{AB} + \lambda'\overrightarrow{BA} \\ & = & A + (1-\lambda')\overrightarrow{AB}. \end{array}$$

► Si $\lambda'\lambda = 1$, on a $\overrightarrow{\psi} = Id$. On en déduit que ψ est une translation. On note u son vecteur. Grâce au calcul précédent, on obtient :

$$u = \overrightarrow{AA'} = (1-\lambda')\overrightarrow{AB}.$$

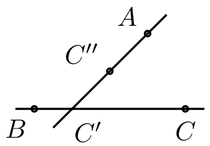
► Si $\lambda'\lambda \neq 1$, ψ est une homothétie de rapport $\lambda'\lambda$. On peut vérifier que son centre est le point O tel que

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-\lambda'\lambda}\overrightarrow{AA'} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda'\lambda}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 1.25. :

⚠ On suppose que $\lambda, \mu \neq 1$.

On pose $C' = h(B,\mu)(C)$ et $C'' = h(A,\lambda)(C')$.



On a

$$C'' = h(A,\lambda) \circ h(B,\mu)(C) = h(C,\nu)(C) = C.$$

On en déduit que $C' \in (BC) \cap (AC'') = (BC) \cap (AC)$. On trouve

$$(AC) = (CC') = (BC)$$

et donc finalement $A \in (BC)$.

Exercice 1.26. :

On note $\mathcal{R}$ le repère affine de $\mathcal{E}$, d'origine notée O.

► <u>Translation</u> :

On sait que

$$t_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v} = O + \overrightarrow{OM} + \vec{v}.$$

Si $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} x'_M = x_M + a \\ y'_M = y_M + b \end{cases}$$

► <u>Homothétie</u> :

On sait que

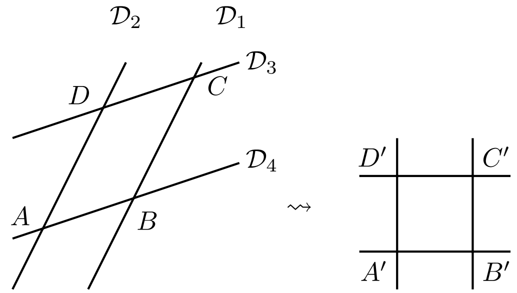
$$h(A,\lambda)(M) = A + \lambda\overrightarrow{AM} = A + \lambda(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).$$

Si $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$, on obtient

$$\begin{cases} x'_M = x_A + \lambda(x_M - x_A) \\ y'_M = y_A + \lambda(y_M - y_A) \end{cases}$$

Exercice 1.27. :

1. Soient $\mathcal{D}_1 : y = 2x+1$, $\mathcal{D}_2 : y = 2x+3$, $\mathcal{D}_3 : x = 3y$, $\mathcal{D}_4 : x = 3y+4$. On note $A = \mathcal{D}_4 \cap \mathcal{D}_2$, $B = \mathcal{D}_4 \cap \mathcal{D}_1$, $C = \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1$ et $D = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.



On va construire une application affine φ qui envoie les points A, B, C, D respectivement sur les points $A' = (0,0)$, $B' = (1,0)$, $C' = (1,1)$, $D' = (0,1)$. On a

$$\begin{array}{rcl} \varphi(M) & = & \varphi(A) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \\ & = & A' + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \\ & = & A + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \\ & = & t_{\overrightarrow{AA'}} \circ \varphi_{A'}. \end{array}$$

où $\varphi_{A'}$ est l'application affine affine admettant A' comme point fixe et d'A.L. associée $\overrightarrow{\varphi}$.Il suffit donc de déterminer une application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ transformant la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ en la base $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}$.

► On calcule les coordonnées des points A, B, D. On obtient

$$A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad D = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : $C = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

► Pour trouver la matrice M de $\overrightarrow{\varphi}$, il faut résoudre les équations

$$\begin{array}{rcl} M\overrightarrow{AB} & = & \overrightarrow{A'B'} \\ M\overrightarrow{AD} & = & \overrightarrow{A'D'}. \end{array}$$

On trouve $M = P^{-1}$ où $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

► Finalement, l'expression matricielle de φ envoyant A, B, D sur A', B', D' est

$$X' = A' + M(X - A) = M(X - A)$$

et une expression paramétrique de φ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x' & = & 4(x + \frac{13}{5}) - 2(y + \frac{11}{5}) \\ 4y' & = & -(x + \frac{13}{5}) + 3(y + \frac{11}{5}) \end{array} \right.$$

► $\varphi(C) = C'$:
On peut le vérifier par calcul, mais on peut le faire de manière plus élégante :
On pose C' tel que $A'B'C'D'$ soit un carré. On a

$$C \in \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1 \Rightarrow \varphi(C) \in \varphi(\mathcal{D}_3) \cap \varphi(\mathcal{D}_1)$$

Or, $\varphi(\mathcal{D}_3)$ est la droite parallèle à $\varphi(\mathcal{D}_4)$ et passant par $\varphi(D) = D'$. On a donc $\varphi(\mathcal{D}_3) = (D'C')$. De même, on a $\varphi(\mathcal{D}_1) = (B'C')$. On en déduit

$$\varphi(C) \in (D'C') \cap (B'C') = \{C'\}.$$

2. Ceci ne fonctionne pas pour n'importe quel quadrilatère. Il doit être un parallélogramme :

Exercice 1.28. :

Notation : On note

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{C})$$

deux repères de $\mathcal{E}$ et

$$\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}') \text{ et } \mathcal{S}' = (\Omega', \mathcal{C}')$$

deux repères de $\mathcal{E}'$. On se donne une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. On note $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Pour plus de clarté, on notera $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

On cherche à exprimer $\varphi(X)_{\mathcal{S}'}$ à l'aide de $X_{\mathcal{S}}$, $A = \overrightarrow{\varphi}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $B = \varphi(O)_{\mathcal{R}'}$.

On a

$$\varphi(X)_{\mathcal{S}'} = \overrightarrow{\varphi}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} X_{\mathcal{S}} + \varphi(\Omega)_{\mathcal{S}'}.$$

On sait que

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\varphi}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} \overrightarrow{\varphi}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} A P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\Omega)_{\mathcal{S}'} & = & \overrightarrow{\Omega'\varphi(\Omega)}_{\mathcal{C}'} \\ & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} \overrightarrow{\Omega'\varphi(\Omega)}_{\mathcal{B}'} \\ & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} \big(\overrightarrow{\Omega'O'}_{\mathcal{B}'} + \overrightarrow{O'\varphi(O)}_{\mathcal{B}'} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(\Omega)}_{\mathcal{B}'} \big) \\ & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} \big(\overrightarrow{\Omega'O'}_{\mathcal{B}'} + B + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{O\Omega})_{\mathcal{B}'} \big) \\ & = & P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'} \big(-\Omega'_{\mathcal{R}'} + B + A\Omega_{\mathcal{R}} \big). \end{array}$$

Si on note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $Q = P_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X)_{\mathcal{S}'} & = & Q^{-1}AP\ X_{\mathcal{S}} + Q^{-1}\big(-\Omega'_{\mathcal{R}'} + B + A\Omega_{\mathcal{R}} \big) \\ & = & Q^{-1}\big(\ A(P\ X_{\mathcal{S}} + \Omega_{\mathcal{R}}) - \Omega'_{\mathcal{R}'} + B\ \big) \end{array}$$

Autrement dit,

$$Q\varphi(X)_{\mathcal{S}'} + \Omega'_{\mathcal{R}'} = A(P\ X_{\mathcal{S}} + \Omega_{\mathcal{R}}) + B.$$

Exercice 1.29. :

On va montrer que l'ensemble des applications affines vérifiant la condition $\overrightarrow{M'M''} = \alpha MM'$ sont les applications affines $\varphi_O \in \mathcal{A}ff(\mathcal{E})$ vérifiant :

$$\overrightarrow{\varphi}_O(u) = u \text{ et } \overrightarrow{\varphi}_O(v) = \alpha v, \quad \forall u \in H,\ v \in F$$

pour une décomposition $E = H \oplus F$ ayant un point fixe $O \in mcE$.

Remarque : Si $H = \emptyset$, φ est une homothétie et sinon, H est une affinité de rapport α, de direction F et de base $\mathcal{H} = O + H$.

démontration :

La propriété énoncée rappelle la définition d'une affinité vectorielle f, où

$$f(v) = \alpha v\ \forall v \in \mathrm{Im}(f - Id).$$

On va donc naturellement s'intéresser aux espaces

$$H = \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id),\ \ F = \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id).$$

- On montre que $E = H \oplus F$:

D'après le théorème du rang, il suffit de montrer que $H \cap F = \emptyset$.

Soit $x \in F$, il existe $\overrightarrow{OM} \in E$ tel que

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{MM'}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in F$, on a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi}(x) &= \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{O'O}) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{MM'}) \\ &= \overrightarrow{O''O'} + \overrightarrow{M'M''} \\ &= \alpha\overrightarrow{O'O} + \alpha\overrightarrow{MM'} \\ &= \alpha x. \end{aligned}$$

Si, de plus, $x \in H$, on a ainsi

$$\vec{0} = \overrightarrow{\varphi}(x) - x = (\alpha - 1)x.$$

Finalement, comme $\alpha \neq 1$, on obtient $x = \vec{0}$.

- Forme de $\overrightarrow{\varphi}$:

Les résultats obtenus ci-dessus permettent de dire directement que :

$$\overrightarrow{\varphi}(u) = u \ \forall u \in H$$

(par définition du noyau $H = \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id)$, et

$$\overrightarrow{\varphi}(v) = \alpha v \ \forall v \in F.$$

- Forme de φ :

(D'après un résultat de cours), comme $E = \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - Id)$, on sait qu'il existe $u \in \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id)$ et $O \in \mathcal{E}$ tels que

$$\varphi = t_u \circ \varphi_O,$$

où φ_0 est une application affine à point fixe O.

On montre que $u = \vec{0}$:

Par définition de O et u, on a

$$\overrightarrow{OO'} = u \in \ker(\overrightarrow{\varphi} - Id).$$

Autrement dit, on a

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha\overrightarrow{O'O''} = \alpha\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OO'}) = \alpha\overrightarrow{OO'},$$

ce qui donne $u = \overrightarrow{OO'} = \vec{0}$, car $\alpha \neq 1$.

Exercice 1.30. :

1. Soit D une droite vectorielle. On a

$$GL(D) = \{\lambda Id \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Soit u_0 un vecteur directeur non nul de D. Soit $f \in Gl(D)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(u_0) = \lambda u_0$. On vérifie (facilement) que $f = \lambda Id$.

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine. On a

$$GA(\mathcal{D}) = \{\text{homothéties, translations}\}.$$

Soit $\varphi \in GA(\mathcal{D})$. Celle-ci a une application vectorielle associée $f \in GL(D)$. Il en résulte que $f = \lambda Id$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Autrement dit, φ est une translation si $\lambda = 1$ ou une homothétie si $\lambda \neq 1$.